ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 25 FÉVRIER 1946.

PRÉSIDENCE DE M. ELIE CARTAN

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

M. le **MINISTRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE** adresse ampliation du décret, en date du 13 février 1946, portant approbation de l'élection que l'Académie a faite de M. **JEAN BECQUEREL**, pour occuper, dans la Section de Physique générale, la place vacante par le décès de M. *Jean Perrin*.

Il est donné lecture de ce décret.

Sur l'invitation de M. le Président, M. **JEAN BECQUEREL** prend place parmi ses Confrères.

M. le **PRÉSIDENT** souhaite la bienvenue à M. **GEORGES GEORGALAS**, Membre de l'Académie d'Athènes, qui assiste à la séance.

M. le **SECRÉTAIRE PERPÉTUEL** dépose sur le bureau le fascicule 2, tome 84 des *Proceedings of the American Philosophical Society*, consacré à la Commémoration de la vie et de l'œuvre de **ALEXANDER DALLAS BACHE** (1806-1867) qui fut Correspondant de l'Académie pour la Section de Géographie et Navigation.

M. **ÉLIE CARTAN** s'exprime en ces termes :

J'ai l'honneur de présenter à l'Académie la seconde édition de mes *Leçons sur la Géométrie des espaces de Riemann*, dont la première édition a paru en 1928 dans la Collection des *Cahiers scientifiques*, dirigée par notre Confrère Julia. Cette seconde édition diffère de la première par d'assez nombreuses additions. Un nouveau Chapitre est consacré à la méthode du repère mobile. Le Chapitre sur les coordonnées normales de Riemann a été complété par un nouveau Chapitre sur la symétrie, le transport parallèle et les espaces symétriques. Enfin deux nouveaux Chapitres sont consacrés aux groupes de déplacement des espaces de Riemann et aux conditions d'application de deux espaces de Riemann.

NOMINATIONS.

MM. **Émile Borel** et **Gaston Julia** sont désignés pour représenter l'Académie aux Cérémonies qui auront lieu à Londres et à Cambridge, les 15 juillet 1946 et jours suivants, en commémoration du trois-centième anniversaire de la naissance de Isaac Newton.

ÉLECTIONS.

L'Académie procède par la voie du scrutin à l'élection d'un Membre de la Section de Mécanique, en remplacement de M. *Émile Jouguet*, décédé.

Le nombre des votants étant 46,

M. Henri Beghin	obtient	28 suffrages
M. Jean Villey	»	15 »
M. Maurice Roy	»	2 »
M. Charles Platrier	»	1 »

M. **Henri Beghin**, ayant obtenu la majorité absolue des suffrages, est proclamé élu.

Son élection sera soumise à l'approbation du Gouvernement provisoire de la République.

CORRESPONDANCE.

M. le **Secrétaire perpétuel** signale parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

1° Baronne Dupuytren. *Pensées diverses*. Introduction par le Dr Léon Delhoume.

2° Albert Ranc. *Jean Perrin*.

3° Pietro Rondoni. *Il Cancro. Istituzioni di patologia generale dei Tumori*.

4° Florent Bureau. *Calcul vectoriel et calcul tensoriel* (présenté par M. P. Montel).

M. **Nicolas T. Belaiew** adresse des remercîments pour la distinction accordée à ses travaux.

M. **Constantin Levaditi** prie l'Académie de bien vouloir le compter parmi les candidats à la place vacante dans la Section d'Économie rurale par le décès de M. *Gustave Moussu*.

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Sur la décomposition spectrale des fonctions aléatoires stationnaires d'ordre deux.* Note de MM. **André Blanc-Lapierre** et **Robert Fortet**, présentée par M. Émile Borel.

Introduction. — Soit $x(t)$ une fonction aléatoire du paramètre t, stationnaire au sens de Khintchine ([1]), $\rho(\tau)$ et $\mathcal{F}(\omega)$ ([2]) sa fonction de corrélation et sa fonction spectrale

$$(1) \qquad \rho(\tau)=\int_0^\infty \cos\omega\tau\, d\mathcal{F}(\omega) \quad \text{et} \quad \overline{x^2}=\mathcal{F}(+\infty).$$

Nous désignerons par $\overline{X}$ l'espérance mathématique d'une variable aléatoire X.

Nous nous proposons de préciser les propriétés de $\mathcal{F}(\omega)$ en vue d'obtenir une décomposition spectrale qui découle directement de la considération des filtres utilisés en électrotechnique ou en optique.

I. *Filtres linéaires.* — Soit la transformation linéaire $\mathcal{R}_1$ [filtre $\mathcal{R}_1$]

$$(2) \qquad x_1(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta)\, \mathrm{R}_1(t-\theta)\, d\theta=\mathcal{R}_1[x(t)];$$

R_1 est supposé absolument intégrable, ce qui donne un sens à (2) presque certainement. $\mathcal{R}_1$ peut être caractérisé par son gain $\mathrm{G}(\omega)$ [module $\gamma(\omega)$, argument $\varphi(\omega)$]; on a

$$(3) \qquad \mathcal{R}_1\{\sin\omega t\}=\gamma(\omega)\sin[\omega t+\varphi(\omega)] \quad \text{et} \quad \mathrm{G}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t}\,\mathrm{R}_1(t)\, dt.$$

Deux filtres seront disjoints si $\mathrm{G}_1(\omega)\,\mathrm{G}_2(\omega)\equiv 0$; un filtre est nul si $\mathrm{G}\equiv 0$.

Théorème I. — 1° *A* $\lambda_1\mathcal{R}_1+\lambda_2\mathcal{R}_2$ *est associé le gain* $\lambda_1\mathrm{G}_1+\lambda_2\mathrm{G}_2$.

2° *Au filtre* $\mathcal{R}_1.\mathcal{R}_2$ *est associé* $\mathrm{G}_1(\omega).\mathrm{G}_2(\omega)$; *le produit de deux filtres disjoints est nul.*

3° *Entre* $\mathcal{R}_1[x(t)]$ et $\mathcal{R}_2[x(t)]$ *on a la relation* (4), *qui renferme* (5) *comme cas particulier* [$\mathcal{F}_{\mathcal{R}}(\omega)$ est le spectre de $\mathcal{R}[x(t)]$]

$$(4) \qquad \overline{\mathcal{R}_1[x(t)],\, \mathcal{R}_2[x(t+\tau)]}=\int_0^\infty \gamma_1(\omega)\gamma_2(\omega)\cos[\omega\tau+\varphi_2(\omega)-\varphi_1(\omega)]\, d\mathcal{F}(\omega)$$

et

$$(5) \qquad \mathcal{F}_{\mathcal{R}}(\omega)=\int_0^\omega \gamma_{\mathcal{R}}^2(\omega')\, d\mathcal{F}(\omega').$$

La relation (5) montre comment l'*énergie* $\mathcal{F}(\omega)$ répartie sur l'ensemble des pulsations ω, dans $x(t)$ est *filtrée* à travers $\mathcal{R}$.

Théorème II. — *Soient des filtres* $\mathcal{R}_{1,\alpha}$ *et* $\mathcal{R}_{2,\alpha}$ *dévendant de* α, *supposons que*

([1]) *Math. Annalen*, **109**, 1934, p. 604.

([2]) Nous supposons, pour plus de simplicité, $\mathcal{F}(\omega)$ continu, la partie discontinue ayant été isolée et étudiée par Slutsky ([3]); mais cette restriction ne s'impose pas.

lorsque $\alpha \to \alpha_0$, $G_{1,\alpha}$ *tende vers* $G_{2,\alpha}$, *sauf, peut-être, sur un intervalle de* $\mathcal{F}$ *mesure nulle,* $G_{1,\alpha}(\omega)$ et $G_{2,\alpha}(\omega)$ *restant uniformément bornés par rapport à* α *et* ω, *alors* $\mathcal{R}_{1,\alpha}[x(t)] - \mathcal{R}_{2,\alpha}[x(t)]$ *tend vers zéro en moyenne quadratique.*

Cela permet d'introduire des filtres limites dont le gain a des formes particulières, qui, si on les posait *a priori*, conduiraient à des R non absolument intégrables. On définit ainsi le filtre identique $\mathcal{E}$, pour lequel $G(\omega) \equiv 1$, le filtre complémentaire de $\mathcal{R} : \mathcal{C}_R = \mathcal{E} - \mathcal{R}$. On peut ainsi définir des filtres très généraux; les plus utilisés pour les applications sont les filtres *passe-bande* $\mathcal{R}_{\omega_1,\omega_2}$ pour lesquels $G(\omega) \equiv 0$, sauf sur l'intervalle $\omega_1\omega_2$ où $G(\omega) = 1$. $\mathcal{R}_{\omega_1,\omega_2}[x]$ a un spectre $S(\omega)$ nul pour $\omega < \omega_1$, constant pour $\omega > \omega_2$ et satisfaisant à $dS(\omega) = d\mathcal{F}(\omega)$ pour $\omega_1 < \omega < \omega_2$.

II. *Décomposition spectrale.* — Théorème III. — *Soient* $\omega_1\omega'_1, \omega_2\omega'_2, \ldots, \omega_k\omega'_k$ *des intervalles disjoints,* $\mathcal{R}_{\omega_1\omega'_1}, \mathcal{R}_{\omega_2\omega'_2}, \ldots$ *les filtres correspondants,* $\mathcal{R}_c$ *le complémentaire de leur somme.*

1° $x(t) = \mathcal{R}_{\omega_1\omega'_1}[x] + \mathcal{R}_{\omega_2\omega'_2}[x] + \ldots + \mathcal{R}_c[x]$ *avec la probabilité* 1.

2° *les composantes ainsi mises en évidence sont 2 à 2 non correlées, c'est-à-dire qu'elles satisfont aux relations du type* $\overline{\mathcal{R}_i[x(t)] \cdot \mathcal{R}_j[x(t+\tau)]} = 0$ *pour* $i \neq j$ *quel que soit* τ.

3° *Si, en plus,* $x(t)$ *est stationnaire au sens strict, il en est de même de chacune de ces composantes.*

Ces résultats complètent ceux de Khintchine ([1]) et Slutsky ([3]); ils pourraient être obtenus en utilisant comme point de départ un résultat de Loève ([4]).

Remarques. — 1° Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, complexe, séparable; $[x, y]$ représentant le produit scalaire des éléments x et y de $\mathcal{H}$, avec $|x|^2 = [xx^*]$; [x^* représente le conjugué de x]; soit t un paramètre réel $[-\infty < t < +\infty]$ nous considérons des opérations linéaires U^t fonctions de t, définies sur $\mathcal{H}$, et satisfaisant aux conditions

(*a*) $\lim_{\Delta t \to 0} U^{\Delta t} = U^0 = E$ [E opération identique dans $\mathcal{H}$],

(*b*) $U^{t+\tau} = U^t . U^\tau = U^\tau . U^t$,

(*c*) $[x, y^*] = [U^t[x] . U^{*t}[y]]$.

Les mêmes méthodes appliquées à la décomposition spectrale de U^t donnent des résultats très étendus qu'on peut rapprocher aussi des travaux de Godement ([5]) et de Loève ([4]).

2° La relation (4) permet d'envisager des décompositions issues de filtres non disjoints, mais tels que, pour $\tau = 0$ par exemple, $\cos(\omega\tau + \varphi_2 - \varphi_1)$ soit nul pour tous les ω qui n'annulent pas $\gamma_1 . \gamma_2$. Les composantes ainsi obtenues n'ont pas de corrélation pour $\tau = 0$, mais cela ne vaut plus pour τ quelconque.

([3]) *Actualités Scientifiques*, 738, 1938, p. 33.

([4]) *Comptes rendus*, 220 1945, p. 380.

([5]) *Comptes rendus*, 222, 1946, p. 213.

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Quelques propriétés des fonctions aléatoires de second ordre.* Note de M. **Michel Loève**, présentée par M. Émile Borel.

Nous allons indiquer quelques propriétés des fonctions aléatoires (f. a.) possédant une variance finie pour chaque valeur donnée du paramètre (on dira *f. a. de second ordre*), que nous n'avons pas énoncées dans nos Notes précédentes ([1]).

Soit $X(\alpha)$, $\alpha \in A$, une f. a. de second ordre, non dégénérée, à valeur moyenne nulle et à covariance ([1]) $\Gamma(\alpha, \beta)$ *bornée sur* $A \times A$.

I. *Décompositions orthogonales.* — 1. Soit un ensemble $\{\alpha_i\}_1^\infty \subset A$. *On peut décomposer la f. a.* $X(\alpha)$ *en une f. a.* $Y(\alpha)$, *combinaison linéaire presque-certaine des* $X(\alpha_i)$, *et une f. a.* $Z(\alpha)$ *orthogonale aux* $X(\alpha_i)$.

Si l'ensemble considéré est *fixe*, les f. a. composantes sont orthogonales sur A : $\mathfrak{M}\, Y(\alpha) Z^*(\beta) = 0$; $\alpha, \beta \in A$. Supposons-le *mobile*, soit $A_S(\alpha)$, de la façon suivante : $\alpha_i = S^i \alpha$ où S, indépendant de i, transforme tout α_i en α_{i+1}. Alors :

On peut décomposer la f. a. $X(\alpha)$ *en deux f. a.* $U(\alpha)$ *et* $V(\alpha)$, *orthogonales sur* $A_S(\alpha)$ *et telles que, sur cet ensemble,* $U(\alpha)$ *soit une combinaison linéaire presque-certaine des variables aléatoires mutuellement orthogonales* $Y(\alpha_i)$ *et* $V(\alpha)$ *soit une combinaison linéaire presque-certaine des* $V(\alpha_i)$.

Dans le cas des f. a. stationnaires, cette proposition contient (pour $\alpha_i = \alpha - i$) une importante propriété due à H. Wold.

2. *Une f. a.* $X(\alpha)$, *continue en m. q.* ([1]) *sur* (a, b), *y possède une décomposition orthogonale* $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i X_i(\alpha)$, *les f. a.* $X_i(\alpha)$, *mutuellement orthogonales, y étant continues en m. q. et déterminées à des facteurs certains près.*

3. Une *f. a. analytique* possède un développement orthogonal autour de $\alpha = 0$ si, et seulement si, *sa covariance est fonction du produit* $\alpha\beta$.

Nous avons montré ([1]) que les *f. a. stationnaires, continues en m. q.*, possèdent une décomposition orthogonale *harmonique qui les caractérise.*

Toutes les fois que la f. a. est décomposée en f. a. mutuellement orthogonales, sa covariance est décomposée en une somme de covariances, mais, pour que $X(\alpha) = X_1(\alpha) + X_2(\alpha)$ entraîne $\Gamma(\alpha, \beta) = \Gamma_1(\alpha, \beta) + \Gamma_2(\alpha, \beta)$, *il faut et il suffit* que l'on ait seulement

$$\mathfrak{M}\, X_1(\alpha) X_2^*(\beta) + \mathfrak{M}\, X_2(\alpha) X_1^*(\beta) = 0,$$

ce qui, dans le cas des f. a. réelles, entraîne l'orthogonalité des *variables aléatoires* $X_1(\alpha)$ et $X_2(\alpha)$.

Remarquons enfin qu'à une f. a. $\{X_i\}_1^\infty$, on peut, sous certaines conditions,

---

([1]) *Comptes rendus*, 220, 1945, pp. 295 et 380 (la remarque de la deuxième Note s'applique encore ici).

associer une f. a. *biorthogonale* $\{X^i\}$, de covariance $\Gamma^{i,j}$ et, pour que l'on puisse avoir $a_i(\alpha) = \mathfrak{M} X(\alpha) X_i^\star$, *il faut et il suffit que* $\sum_i \sum_j a_i(\alpha) \Gamma^{i,j} a_j^\star(\alpha)$ *soit bornée.*

II. *Loi forte des grands nombres.* — Supposons la f. a. continue en m. q. sur le demi-axe positif et soit x une variable réelle certaine.

On a

$$\mathfrak{M}\,|\,Y_x(T)\,|^2 = \mathfrak{M}\left|\frac{1}{T}\int_0^T X(\alpha)e^{i\alpha x}\,d\alpha\right|^2 = \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T \Gamma(\alpha,\beta)e^{i(\alpha-\beta)x}\,d\alpha\,d\beta,$$

d'où, par un raisonnement classique utilisant le lemme de Borel-Cautelli :

La f. a. $Y_x(T)$ *tend fortement vers zéro, pour tout* x *donné, lorsque* $T \to \infty$, *si*

$$\frac{1}{T}\int_0^T\int_0^T \Gamma(\alpha,\beta)e^{i(\alpha-\beta)x}\,d\alpha\,d\beta = O(1).$$

1. Lorsque $X(\alpha)$ est stationnaire, on a $\Gamma(\alpha, \beta) = \varphi(\alpha - \beta)$; l'expression ci-dessus devient

$$(1) \qquad f_T(x) = \int_{-T}^{+T}\left(1 - \frac{|t|}{T}\right)\varphi(t)e^{itx}\,dt,$$

et la proposition qui précède contient [pour $x = 0$ et $X(\alpha)$ réel] les résultats de M. Kampé de Fériet et de MM. Blanc-Lapierre et Brard [2].

2. Posons

$$\varphi_T(t) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{|t|}{T}\right)\varphi(t) & \text{pour } |t| \leqq T, \\ 0 & \text{pour } |t| \geqq T. \end{cases}$$

Si l'on observe que $f_T(x)$ représente dans le cas stationnaire la quantité *non négative* $TE|Y_x(T)|^2$ et que $\varphi(\alpha - \beta)$ est, en tant que covariance [1], une fonction *positive-définie*, on peut donner une démonstration très simple du théorème de Böchner.

En effet, l'intervalle d'intégration dans (1) étant fini, la formule d'inversion s'obtient sans difficulté en multipliant les deux membres de (1) par e^{-iux}, sommant par rapport à x de $-A$ à $+B$ et appliquant le lemme de Riemann-Lebesgue lorsque A et B $\to \infty$. En revenant à la variable t, on a ainsi

$$\varphi_T(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f_T(x)e^{-itx}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\,dF_T(x),$$

où $F_T(x)$ est une fonction non décroissante, à variation totale $\varphi(0) \neq 0$. Par suite, au facteur $1/\varphi(0)$ près, $\varphi_T(t)$ est une fonction caractéristique qui, lorsque $T \to \infty$, tend vers $\varphi(t)$, uniformément dans tout intervalle fini. Donc, en vertu du théorème de P. Lévy, $\varphi(t)$ est une fonction caractéristique.

---

(2) Kampé de Fériet, *Annales de la Société royale de Bruxelles*, **59**, 1939, p. 145; Blanc-Lapierre et Brard, *Comptes rendus*, **220**, 1945, p. 134.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *L'évaluation des coefficients d'une représentation asymptotique générale.* Note (¹) de M. SZOLEM MANDELBROJT, présentée par M. Paul Montel.

1. Soit $\{\lambda_n\}$ une suite positive croissante, et soit $N(x)$ le nombre de λ_n inférieur à $x(x>0)$. Les fonctions $N(x)$ et

$$\overline{N}(x)=\frac{2x^2}{\pi}\int_0^\infty \frac{N(t)\,dt}{t(t^2+x^2)}$$

seront appelées respectivement distribution et distribution moyenne de $\{\lambda_n\}$. Les quantités

$$\overline{\lim}\frac{N(x)}{x}=\dot{D} \qquad \text{et} \qquad \overline{\lim}\frac{\overline{N}(x)}{x}=\overline{D}$$

seront appelées respectivement densité supérieure et densité supérieure moyenne de $\{\lambda_n\}$. On a $\overline{D}\leq\dot{D}$. Il existe des suites $\{\lambda_n\}$ pour lesquelles $\overline{D}<\dot{D}$. Dans tout ce qui suit nous supposons que $\overline{D}<\infty$. La fonction $E(u)$ définie par

$$E(u)=\pi(\overline{D}+u)\int_0^\infty e^{-\pi ut+\pi[\overline{N}(t)-\overline{D}t]}\,dt$$

sera appelée fonction de croissance de $\{\lambda_n\}$. Nous allons indiquer la liaison entre la rapidité de la croissance de $E(u)$ lorsque u décroît vers zéro, et la régularité de la distribution des $\{\lambda_n\}$. Si k est un entier positif tel qu'il existe un entier positif p satisfaisant l'égalité (1) : $p-\overline{D}\lambda_p>k$, il existe aussi un entier positif q, $q<p$, tel que $q-\overline{D}\lambda_q>k-1$. Soit m_k le plus petit entier positif k satisfaisant (1). Posons $\overline{\lambda_k}=\lambda_{m_{k-1}}$. La suite $\{\overline{\lambda_n}\}$ (qui peut être vide) sera appelée suite supérieure de la suite $\{\lambda_n\}$. Les λ_n qui n'appartiennent pas à $\{\overline{\lambda_n}\}$ constituent la suite inférieure de la suite $\{\lambda_n\}$. La densité supérieure de la suite inférieure est égale à la densité supérieure moyenne de $\{\lambda_n\}$. La distribution $N_1(x)$ et la distribution moyenne $\overline{N_1}(x)$ de la suite inférieure satisfont les inégalités $N_1(x)\leq\overline{D}x$, $\overline{N_1}(x)\leq\overline{D}x$. Si l'on partage $\{\lambda_n\}$ en deux suites sans terme commun $\{\mu_n\}$ et $\{\nu_n\}$, telles que la distribution $N_2(x)$ de $\{\mu_n\}$ satisfasse l'inégalité $N_2(x)\leq\overline{D}x$ (sa distribution moyenne satisfait alors la même inégalité), on a pour tout n, pour lequel $\overline{\lambda_n}$ existe : $\overline{\lambda_n}\geq\nu_n$. La rapidité de croissance de $E(u)$, lorsque u décroît vers zéro, caractérise la croissance de la distribution de $\{\overline{\lambda_n}\}$.

La suite $\{\Lambda_n\}$, définie par

$$\Lambda_n=\prod_{m\neq n}\left|\frac{\lambda_m^2}{\lambda_m^2-\lambda_n^2}\right|,$$

sera appelée suite associée à la suite $\{\lambda_n\}$.

(¹) Séance du 4 février 1946.

Soit $F(s)$ une fonction holomorphe dans un domaine Δ du plan $s = \sigma + ti$, soit $\{d_n\}$ une suite de nombres réels ou complexes, soit $\{\lambda_n\}$ une suite positive croissante et soit $\{\varphi_n(\sigma)\}$ une suite de fonctions positives décroissantes avec la propriété $\varphi_{n+1}(\sigma) = O(\varphi_n(\sigma))\,(\sigma \to \infty)$. Soit $\varphi(\sigma) = \underline{\text{borne}}_{n \to \infty}\, \varphi_n(\sigma)$. Si pour chaque n, on a dans Δ

$$\left| F(s) - \sum_1^n d_m e^{-\lambda_m s} \right| \leqq \varphi_n(\sigma),$$

nous dirons que la fonction $F(s)$ est représentée dans Δ asymptotiquement par $\Sigma d_n e^{-\lambda_n s}$ avec la précision $\varphi(\sigma)$.

Nous dirons que $F(s)$ peut être prolongée analytiquement de Δ au cercle $C(b, \rho)$, de centre b et de rayon ρ, à travers un canal de largeur $2R$, s'il existe une fonction holomorphe dans la réunion de Δ, $C(b, \rho)$ et de l'ensemble des cercles de rayon R et dont les centres sont situés sur un arc de Jordan, un de ces cercles se trouvant à l'intérieur de $C(b, \rho)$, un autre à l'intérieur de Δ, cette fonction étant égale à $F(s)$ dans Δ.

2. Nous pouvons maintenant énoncer un théorème beaucoup plus général que celui que nous avons démontré ([2]), et qui permet d'établir des résultats très généraux dans plusieurs branches de la théorie des fonctions.

THÉORÈME. — *Soit Δ un domaine défini par $\sigma > a$, $|t| < g(\sigma)\,(\sigma > a)$, où $g(\sigma)$ est une fonction positive croissante tendant vers $\pi c\,(c < \infty)$ lorsque σ tend vers l'infini, l'aire de la partie de la demi-bande horizontale $\sigma \geqq a$, $|t| \leqq \pi c$, non comprise dans Δ, étant finie. Soit $\{\lambda_n\}$ une suite positive croissante de densité supérieure moyenne, $\overline{D}$, finie et dont la fonction de croissance est $E(u)$.*

Soit $F(s)$ une fonction holomorphe dans Δ, représentée asymptotiquement dans Δ par $\Sigma d_n e^{-\lambda_n s}$ avec une précision $\varphi(\sigma)$.

Si $\overline{D} < c$ et si l'une des conditions suivantes [condition (A) ou condition (B)] est satisfaite :

A. *Il existe une constante $k > 1/2(c - \overline{D})$ telle que*

$$(a) \qquad \int_a^\infty \log\varphi(\sigma)\, e^{-k\sigma}\, d\sigma = -\infty.$$

B. *L'égalité (a) a lieu avec $k = 1/2(c - \overline{D})$, et il existe une fonction positive, décroissante $u(t)$ telle que*

$$\int_0^\infty u(t)\, dt < \infty, \qquad \varphi(\sigma) = O\left[E(u(\sigma))\right]^{-1} \quad (\sigma \to \infty).$$

Alors, pour chaque $s_0 = \sigma_0 + t_0 i$ et chaque $R > \overline{D}$, tels que la fonction $F(s)$

([2]) *Transactions of the American Mathematical Society*, 55, 1944, p. 96. La fonction φ n'a pas, dans le Mémoire cité, la même signification qu'ici.

peut être prolongée analytiquement de Δ *au cercle fermé* $\overline{C}(s_0, \pi R)$ (*de centre* s_0 *et de rayon* πR) *à travers un canal de largeur supérieure à* $2\pi\overline{D}$, *les inégalités suivantes ont lieu pour chaque entier positif n*

$$|d_n| \leq E(R - \overline{D})\Lambda_n M(s_0, R)\, e^{\lambda_n \sigma_0},$$

où $\{\Lambda_n\}$ *est la suite associée à la suite* $\{\lambda_n\}$ *et où* $M(s_0, R) = \max_{s \in \overline{C}(s_0, \pi R)} |F(s)|$.

MÉCANIQUE DES FLUIDES. — *Études statistiques de la turbulence : corrélations et spectres dans un écoulement de turbulence homogène et isotrope* (¹). Note (²) de M. **François N. Frenkiel.**

J'ai étudié (³) les différentes corrélations et spectres dans un écoulement de turbulence homogène et j'ai introduit le spectre longitudinal $f_x(\omega)$ et le spectre transversal $f_y(\omega)$, liés aux lois de corrélation par les relations

$$(1)\qquad f_x(\omega) = \frac{2}{\pi \overline{u}} \int_0^\infty \cos\left(\frac{\omega s}{\overline{u}}\right) R_x(s)\, ds, \qquad f_y(\omega) = \frac{2}{\pi \overline{u}} \int_0^\infty \cos\left(\frac{\omega s}{\overline{u}}\right) R_y(s)\, ds.$$

Quand la turbulence est en plus isotrope, alors on peut appliquer l'équation de Th. Karman (⁴)

$$(2)\qquad R_\Delta^T(r) = R_\Delta^L(r) + \frac{1}{2} r \frac{dR_\Delta^L(r)}{dr},$$

où $R_\Delta^L(r)$ et $R_\Delta^T(r)$ sont les coefficients de corrélation entre les composantes des vitesses turbulentes simultanées, parallèles et perpendiculaires à la droite de

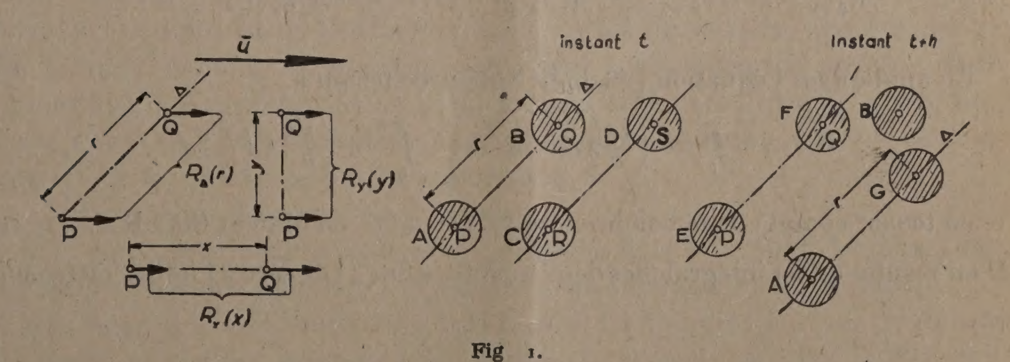


Fig 1.

direction Δ, en deux points distants de r, qui se trouvent sur cette droite.

(¹) Travail effectué à Toulouse en 1941 dans la clandestinité avant la déportation de l'auteur.

(²) Séance du 14 janvier 1946.

(³) *Comptes rendus*, 222, 1946, p. 367. (La figure 1 ci-dessus est relative à la Note précitée).

(⁴) *Journ. Aéro. Scient.*, 4, 1937, p. 131.

En intégrant (1) et en calculant la constante d'intégration par la condition $\lim_{r \to \infty} R^L_\Delta(r) = 0$, je trouve

$$R^L_\Delta(r) = \frac{2}{r^2} \int_0^r s R^T_\Delta(s)\, ds. \tag{3}$$

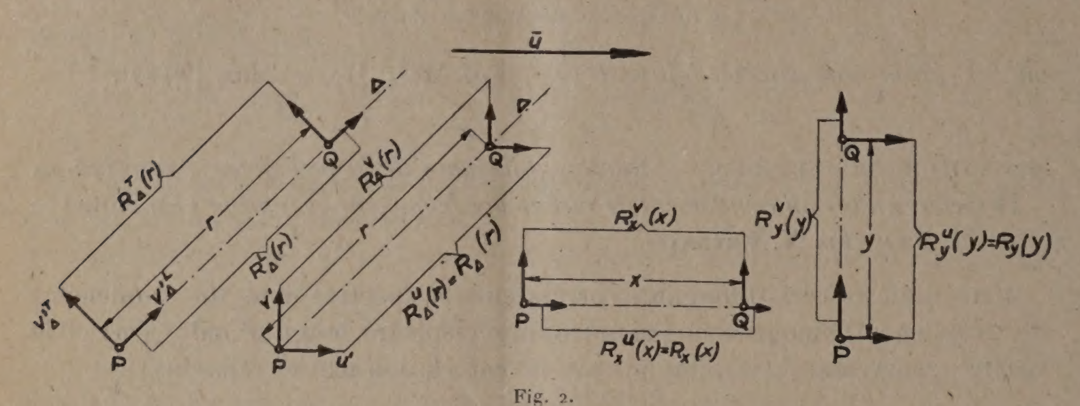


Fig. 2.

En particulier, quand Δ est parallèle à Ox, on aura

$$R_y(y) = R_x(y) + \frac{1}{2} y \frac{dR_x(y)}{dy}, \qquad R_x(x) = \frac{2}{x^2} \int_0^x s R_y(s)\, ds. \tag{4}$$

L'équation tensorielle de Karman ([1]) permet de calculer le coefficient de corrélation R_Δ, en fonction de corrélations R_x et R_y

$$R_\Delta(\sqrt{x^2+y^2}) = \frac{x^2}{x^2+y^2} R_x(\sqrt{x^2+y^2}) + \frac{y^2}{x^2+y^2} R_y(\sqrt{x^2+y^2}). \tag{5}$$

En appliquant l'équation (4) de la Note précitée on a

$$R_x(x) = \int_0^\infty \cos\left(\frac{sx}{\bar{u}}\right) f_x(s)\, d(sx) = \int_0^\infty \cos\left(\frac{s}{\bar{u}}\right) f_x\left(\frac{s}{x}\right) ds,$$

et en tenant compte de la condition $\lim_{\omega \to 0} f_x(\omega) = 0$, on obtient $\lim_{x \to 0} x R_x(x) = 0$. Il en résulte qu'en intégrant les deux membres de (4) de zéro à l'infini, on trouve

$$L_x = 2 L_y. \tag{6}$$

En remplaçant dans (4) R_y par sa valeur donnée dans (2), j'obtiens

$$f_y(\omega) = \frac{1}{2} f_x(\omega) - \frac{1}{2} \frac{df_x(\omega)}{d\omega}, \tag{7}$$

et en intégrant cette équation, je trouve, après avoir calculé la constante d'intégration par la condition $\lim_{\omega \to 0} f_x(\omega) = (2/\pi)(L_x/\bar{u})$, la relation

$$f_x(\omega) = 2\omega \int_\omega^\infty \frac{f_y(s)}{s^2}\, ds. \tag{8}$$

J'appelle *dispersion d'un spectre* l'expression $\overline{\omega^2} = \int_0^\infty s^2 f(s)\, ds$. La quantité λ, introduite par G. I. Taylor ([5]), qui représente la dimension des plus petits tourbillons responsables de la dissipation de l'énergie turbulente, est donnée par

$$\frac{1}{\lambda^2} = -\frac{d^2 R_x(0)}{dx^2} = -\frac{1}{2}\frac{d^2 R_y(0)}{dy^2}.$$

En appliquant l'égalité ([6])

$$\frac{1}{\overline{u}^2}\int_0^\infty s^2 f_x(s)\, ds = -\frac{d^2 R_x(0)}{dx^2},$$

on trouve

$$\lambda = \frac{\overline{u}}{\sqrt{[\overline{\omega^2}]_x}} = \sqrt{2}\frac{\overline{u}}{\sqrt{[\overline{\omega^2}]_y}}, \tag{9}$$

où $[\overline{\omega^2}]_x = \int_0^\infty s^2 f_x(s)\, ds$ et $[\overline{\omega^2}]_y = \int_0^\infty s^2 f_y(s)$. L'équation (9) donne

$$[\overline{\omega^2}]_y = 2[\overline{\omega^2}]_x. \tag{10}$$

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX. — Limite élastique dynamique *et ses relations avec les états structuraux d'un métal.* Note ([1]) de M. **Alexandre Fotiadi**, présentée par M. Albert Portevin.

En vue de rechercher des caractéristiques dynamiques en rapport avec le fonctionnement des pièces dans les moteurs, nous avons exécuté des mesures à l'aide d'éprouvettes d'aciers habituellement utilisés dans les moteurs d'aviation, aciers à l'état trempé ou à l'état trempé et revenu. Ces éprouvettes fonctionnaient soit en torsion alternée, soit en flexion rotative, à la fréquence de 3000 par minute.

1. Le principe de notre essai consiste :

a. à appliquer aux éprouvettes, régulièrement et par paliers, des surcharges toujours égales et constantes (pratiquement 1 ou 2 kg/mm²);

b. à relever, à intervalles réguliers (toutes les minutes), et pendant tout le temps où chaque surcharge est appliquée (5 minutes), l'évolution des phénomènes suivants :

élévation de la température,
augmentation de la déformation,
diminution du couple transmis.

([5]) *Proc. Roy. Soc. London.*, A, 151, 1941, p. 437.
([6]) J. Kampé de Fériet, *Ann. Soc. Scient. Bruxelles*, 1re série, 59, 1939, p. 172.

([1]) Séance du 18 février 1946.

Les mesures les plus précises ont porté :

en torsion alternée, sur l'augmentation de température de l'échantillon, mesurée à l'aide de couples thermoélectriques, avec une précision du 1/10 de degré;

en flexion rotative, sur l'augmentation de flèche de l'éprouvette, mesurée à l'aide d'un comparateur, avec une précision du 1/1000 de millimètre.

2. Nous avons constaté que :

en deçà d'une certaine charge de l'éprouvette, aucun de ces phénomènes n'est décelable;

au delà de cette même charge, tous ces phénomènes apparaissent en même temps.

C'est cette charge-limite, rapportée en kg/mm² à la surface de l'éprouvette, que nous appelons conventionnellement la *limite élastique dynamique* du métal considéré.

3. Nous avons constaté que :

Dans le cas de constituant unique, par exemple, soit uniquement martensite à l'état trempé, soit uniquement sorbite à l'état trempé et revenu, il y a *proportionnalité* entre la limite élastique dynamique E*d* et la dureté Vickers $\Delta\varphi$ du métal ou sa résistance à la traction R. Dans ce cas la limite élastique dynamique est une *propriété entièrement massique* du métal, au même titre que la dureté et la résistance à la traction.

Les coefficients de proportionnalité sont alors :

en torsion, $Ed = 0{,}100\,\Delta\varphi$ ou $0{,}32\,R$,

en flexion, $Ed = 0{,}175\,\Delta\varphi$ ou $0{,}56\,R$.

Nous n'avons pas déterminé les valeurs correspondantes en traction-compression, ne disposant pas d'une machine appropriée.

Dans tous les cas où la structure comporte des constituants multiples juxtaposés, cette limite élastique dynamique est inférieure aux valeurs données par les coefficients ci-dessus : elle est fonction de la dureté du constituant le plus mou (²).

Dans ces cas elle est une *propriété semi-massique du métal*, et c'est alors que sa connaissance a la plus grande importance, et en particulier pour :

les aciers ordinaires au carbone, recuits ou trempés, et comportant de la ferrite;

les aciers de construction, hypertrempés, trempés à l'eau, à l'huile ou à l'air, trempés par étapes, revenus à plus ou moins haute température, et pouvant comporter de l'austénite, de la martensite, de la bainite, de la sorbite;

les aciers de cémentation, cémentés et trempés, dont le cœur du métal

---

(²) Voir à ce sujet A. PORTEVIN, *Revue de Métallurgie*, 20, 1923, p. 49.

peut comporter de la ferrite par trempe à trop basse température, et dont la partie cémentée peut comporter de la cémentite;

les alliages légers comportant plusieurs constituants.

Dans tous les cas, et quelle que soit la structure, la limite élastique dynamique, ainsi mesurée avec la précision indiquée, *n'est pas une propriété ponctuelle* des métaux, en ce sens qu'elle ne met pas en évidence les dépassements locaux de la limite élastique dynamique en certains points du métal, dépassements dus à la présence de contraintes locales préexistant soit à l'intérieur du métal (discontinuités métalliques, contraintes mécaniques et structurales, anisotropie), soit à l'extérieur de la pièce (état de surface, particularités d'usinage, formes).

4. Notre expérience pratique de cinq années d'études dans une entreprise de construction de moteurs d'aviation nous a conduit à estimer que :

a. dans tous les cas la limite élastique dynamique devra être la valeur limite au delà de laquelle on ne devra absolument pas faire fonctionner les métaux dans les constructions, tant statiques que, surtout, dynamiques;

b. la dureté et la résistance à la traction ne pourront être utilisées comme éléments de référence que dans les seuls cas où l'on saurait que la structure ne comporte qu'un seul constituant, cas qui ne se présente, en général, que pour les aciers spéciaux, trempés puis revenus à haute température.

RELATIVITÉ. — *Sur la théorie des forces élastiques.*
Note (¹) de M. **Olivier Costa de Beauregard.**

Nous allons appliquer notre définition covariante de la force (²) à l'étude des forces d'origine superficielle au sein d'un fluide, en commençant par le cas simple d'une pression.

Soit $\mathcal{C}$ une goutte matérielle limitée par un contour bidimensionnel $\mathcal{S}$ du genre espace; la relation entre les tenseurs antisymétriques, *aire élémentaire* δs^{ij} et *force superficielle élémentaire d'Univers* δF^{ij}, est par hypothèse de la forme (1_1); intégrant sur le contour $\mathcal{S}$, désignant par δu^i l'élément tridimensionnel de $\mathcal{C}$, et transformant en intégrale triple, il vient l'expression (1_2) qui, en un sens, permet de considérer la densité volumique de force $f^i = \partial^i \varpi$ comme intégralement équivalente aux δF^{ij} :

$$(1) \qquad \delta F^{ij} = \varpi\, \delta s^{ij}, \qquad \iint_{\mathcal{S}} \delta F^{ij} = \iiint_{\mathcal{C}} (\partial^j \varpi\, \delta u^i - \partial^i \varpi\, \delta u^j).$$

Les deux systèmes de forces, superficiel et volumique, qui ont la même

(¹) Séance du 4 février 1946.
(²) *Comptes rendus*, **221**, 1945, p. 743.

somme, ne fournissent pas le même quadri-travail d'Univers ([3]); τ désignant le temps propre le long des trajectoires d'Univers $\mathcal{L}$ et V^i la quadri-vitesse, on a en effet

$$(2)\qquad \int_{\mathcal{L}} d\tau \iint_{\mathcal{S}} V_j \delta F^{ij} = \int_{\mathcal{L}} d\tau \iiint_{\mathcal{C}} V_j (f^j \delta u^i - f^i \delta u^j) - \int_{\mathcal{L}} d\tau \iiint_{\mathcal{C}} \varpi (\partial^j V_j \delta u^i - \partial^i V_j \delta u^j);$$

le dernier groupe de termes représente la différence annoncée.

Si $\mathfrak{T}$ désigne la portion d'hyperparoi séparant deux *états* successifs $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de la goutte $\mathcal{C}$, le quadri-travail superficiel s'écrit encore

$$(3)\qquad \iiint_{\mathfrak{T}} \varpi\, \delta u^i = \iiiint \partial^i \varpi [dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4] - \iiint_{\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2} \varpi\, \delta u^i.$$

Supposons alors l'hypertube infiniment délié, et prenons des hypercloisons δu^i_0 colinéaires à V^i, et infiniment voisines; la définition (4_1) et la relation (4_2) ont la conséquence (4_3)

$$(4)\qquad \delta u_0 = V_i \delta u^i, \qquad V_i V^i = -c^2, \qquad \delta u^i_0 = -c^{-2} \delta u_0 V^i;$$

multipliant alors par V_i le second membre de (3), il vient

$$d\tau V_i \partial^i \varpi\, \delta u_0 - d\varpi\, \delta u_0 - \varpi\, d\delta u_0 \equiv -\varpi\, d\delta u_0,$$

qui représente la projection sur V_i du quadri-travail superficiel élémentaire. C'est là, par hypothèse, le travail pondéromoteur appliqué à la gouttelette δu_0, en sorte que, ρ_0 désignant la densité massique propre du fluide, l'expression précédente égale $-c^2 d(\rho_0 \delta u_0)$.

Ainsi, lorsqu'on postule l'existence de forces pondéromotrices d'origine superficielle, la masse propre $\iiint \rho_0 \delta u_0$ d'une goutte fluide $\mathcal{C}$ n'est plus conservative; comme corollaire, le paradoxe suivant lequel la notion de pression ne vaudrait qu'au sein d'un fluide incompressible s'évanouit ([4]).

Dans le cas général d'un tenseur élastique E^{ij} quelconque, nous admettrons que le tenseur δF^{ij} n'est plus essentiellement antisymétrique, et nous étendrons suivant (5_1) la formule classique qui le relie à δs^{ij}; $\delta u_k = \delta s_{kj} dx^j$ désignant l'élément volumique d'hyperparoi, (5_2) sera alors l'expression du quadri-travail superficiel élémentaire ([5])

$$(5)\qquad \delta F^{ij} = E^{ik} \delta s^{\cdot j}_{k}, \qquad \delta F^{ij} dx_j = E^{ik} \delta u_k.$$

([3]) Pour abréger, nous appelons ainsi l'impulsion-masse fournie par les F^{ij}. En théorie classique de l'élasticité, la circonstance énoncée n'a lieu que pour le travail proprement dit.

([4]) *Comptes rendus*, **222**, 1946, p. 271.

([5]) La définition *a priori* plus naturelle $\delta F^{ij} = E^{jk} \delta s^{i}_{\cdot k} - E^{ik} \delta s^{j}_{\cdot k}$ a un défaut qui nous

L'extension des résultats précédents se fait alors aisément.

Le moment pondéromoteur total appliqué à la goutte $\mathcal{C}$ s'écrit

$$(6)\quad \iint_{S} x^i \delta F^{jk} - x^j \delta F^{ik} = \iiint_{\mathcal{C}} (x^i \partial^k E^{jl} - x^j \partial^k E^{il})\, \delta u_l + \iiint_{\mathcal{C}} (x^j \partial_l E^{il} - x^i \partial_l E^{jl})\, \delta u^k + \iiint_{\mathcal{C}} [E^{ij} - E^{ji}]\, \delta u^k;$$

les deux ( ) représentent les densités volumiques de moment pondéromoteur orbital dû aux deux densités de force volumiques $f^{ijk} = \partial^i E^{jk}$ et $f^i = \partial_k E^{ik}$, et le [ ] celle du moment pondéromoteur propre bien connu de la théorie classique (⁶).

ASTROPHYSIQUE. — *Sur le triage des éléments par le champ de pesanteur des étoiles.* Note (¹) de M. Evry Schatzman.

Nous avons étudié dans une première Note (²) et dans notre *Thèse* (³) le tirage des éléments dans un champ de pesanteur, lorsque le gaz d'électrons est dégénéré, et les atomes complètement ionisés.

Fowler (⁴) étudie la distribution des atomes d'une atmosphère gazeuse dans un champ de pesanteur, en tenant compte de l'ionisation des atomes, mais ne va pas plus loin que la conclusion banale suivante : les atomes lourds sont plus nombreux que les atomes légers dans les couches inférieures d'une atmosphère.

Il est aisé de démontrer que, dans une région à température et ionisation sensiblement constantes d'un mélange de deux gaz parfaits partiellement ionisés, dont A_1 et A_2 sont les masses atomiques et n_1 et n_2 les degrés moyens d'ionisation, la hauteur de mélange (⁵) est

$$\Delta z = \frac{RT}{g}\,1{,}76\,\frac{\dfrac{1}{n_2+1} + \dfrac{1}{n_1+1}}{\dfrac{A_2}{n_2+1} - \dfrac{A_1}{n_1+1}}.$$

Dans le cas d'un mélange d'hydrogène et de mélange de Russel, on est ainsi conduit à une valeur numérique qui n'est pas essentiellement différente de celle

---

semble rédhibitoire : la valeur du quadri-travail élémentaire ne serait pas indépendante de l'orientation d'Univers de l'élément δs^{ij}.

(⁶) Toutes ces expressions se compliquent dans l'hypothèse écartée (⁴). La présente définition du moment pondéromoteur M^{ijk}, un peu différente de celle indiquée dans notre Note (¹), est telle qu'on ait, pour un point matériel, $M^{ijk} dx_k = x^i dp^j - x^j dp^i$.

(¹) Séance du 2 janvier 1946.

(²) *Comptes rendus*, **219**, 1944, p. 478.

(³) *Revue d'Astrophysique* (sous presse).

(⁴) *Statistical Mechanics*, 1929, Chap. XV et XVI.

(⁵) *Comptes rendus*, **220**, 1945, p. 493.

déjà obtenue précédemment, et toujours plus petite. Nous confirmons ainsi l'existence d'une mince couche de mélange, d'épaisseur petite devant le rayon de l'étoile, *lorsque cette étoile est une naine blanche.*

Une telle formule n'est pas applicable dans le cas du Soleil, mais on doit s'attendre à ce que, dans les couches extérieures du Soleil, en équilibre radiatif, telles qu'elles ont été étudiées par Strömgren ([6]) et par Rudkjøbing ([7]) (abstraction faite de la mince couche convective d'Unsöld), la concentration en éléments lourds aille en croissant vers l'intérieur de l'étoile, pour atteindre assez rapidement la valeur 2/3 trouvée il y a déjà longtemps par Strömgren ([8]), contre environ 10^{-4} à la surface (hypothèse déjà faite par Chandrasekhar, *Stellar Structures*). Comme il faut s'attendre, d'après Biermann, à de vastes courants lents de convection dans les régions internes du Soleil (le transport d'énergie ayant lieu cependant principalement par rayonnement), qui rendent uniforme la composition du Soleil sur de vastes étendues, la valeur 2/3 de la concentration en éléments lourds est atteinte à la surface de séparation entre la région extérieure en équilibre radiatif, et la région intérieure en équilibre convectif.

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Réductibilité des expanseurs.* Note ([1]) de M. **Jacques Courtois.**

D'une façon générale, un *expanseur* ([2]), ([3]) est constitué par les coefficients d'une forme algébrique

$$Q(\vec{x}, \vec{y}, \ldots),$$

$\vec{x}, \vec{y}, \ldots$ désignant un nombre quelconque de vecteurs variables. Les coordonnées (contravariantes ou covariantes) de ces vecteurs figurent dans Q à des puissances quelconques. Cependant on peut en général, par changement de coordonnées ([2]), se ramener au cas où toutes les coordonnées, sauf celles d'indice l, figurent uniquement à des puissances entières positives.

Du point de vue affine, les cas de réductibilité sont tout à fait analogues à ceux d'un tenseur : décomposition de Q en formes homogènes, ou encore symétriques, ou antisymétriques par rapport aux divers vecteurs; contraction si ces vecteurs sont, les uns covariants, les autres contravariants.

Du point de vue métrique, l'expanseur est, sous certaines réserves, *réductible*

([6]) *Festschrift für Elis Strömgren*, 5, 1940, p. 218.
([7]) *Zeits. f. Astr.*, 21, 1942, p. 254.
([8]) *Zeits. f. Astr.*, 4, 1932, p. 118.

([1]) Séance du 18 février 1946.
([2]) P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.*, A, 183, 1945, p. 284.
([3]) J. Courtois, *Comptes rendus*, 222, 1946, p. 377.

en une série de tenseurs. Pour la commodité des notations, nous nous placerons dans le cas d'un seul vecteur $\vec{x}$, mais la démonstration est visiblement générale. Pour un expanseur homogène d'ordre u

$$Q = \sum_{n_i} \frac{u(u-1)\dots(u-p+1)}{\Pi_i(n_i!)} A_{u-p,n_i}(x^l)^{u-p}\Pi_i(x^{i^{n_i}}) \tag{1}$$

avec

$$p = \Sigma_i n_i.$$

les n_i étant entiers positifs. Prenons tout d'abord des coordonnées particulières telles que

$$g_{il} = 0, \qquad g_{ll} \neq 0.$$

On a

$$g_{ll}(x^l)^2 = \vec{x}^2 - g_{ij}x^i x^j \qquad (i, j \neq l),$$
$$(x^l)^{2k} = (g_{ll})^{-k}(\vec{x}^2)^k\left[1 - (\vec{x}^2)^{-1} g_{ij}x^i x^j\right]^k.$$

Quel que soit k, $(x^l)^{2k}$ s'exprime ainsi sous forme d'une *série convergente* si

$$\left|(\vec{x}^2)^{-1} g_{ij}x^i x^j\right| < 1,$$

soit

$$\left|\frac{\vec{x}^2 - g_{ll}(x^l)^2}{\vec{x}^2}\right| < 1, \tag{2}$$

ou, *en supposant $\vec{x}$ réel,*

$$0 < \frac{g_{ll}(x^l)^2}{\vec{x}^2} < 2. \tag{2'}$$

En substituant dans (1), on obtient un développement de la forme

$$Q = \sum_n (\vec{x}^2)^{\frac{u-n}{2}} P_n(x^l, x^i), \tag{3}$$

chaque P_n étant un polynome proprement dit, homogène de degré n. Si l'on change ensuite de coordonnées, le développement garde la même forme, chaque P_n se transformant séparément. Les composantes de A, qui y figurent comme coefficients, se transforment donc comme les composantes d'un tenseur d'ordre n. L'expanseur est donc complètement réductible en une infinité de tenseurs, du moins sous les réserves suivantes :

1° La relation n'est effective que sous la condition (2) ou (2'). Cette condition, par exemple, n'est jamais vérifiée au voisinage du cône $\vec{x}^2 = 0$, où, pourtant, la forme (1) n'a pas en général de singularité. Une même décomposition ne peut être valable de part et d'autre de ce cône. Ce n'est que dans un espace à forme fondamentale *définie positive*, avec $u = 2p/q$, que la décomposition, valable quel que soit $\vec{x}$ réel, peut être considérée comme une identité.

2° La décomposition n'est uniforme que dans un espace *réel*, à moins que u soit *entier*.

3° La relation entre les coefficients de P_n et ceux de Q dépend des $g_{\alpha\beta}$. Au point de vue purement affine, la réduction n'a pas lieu en général.

4° *La méthode n'est pas applicable aux spinexpanseurs.* Soit le spinexpanseur symétrique défini par (1), où les x sont maintenant les coordonnées d'un spineur ([3]). Une rotation d'angle θ de certains des axes multiplie x^l par $e^{i\theta/2}$. Une rotation de 4π transforme en elles-mêmes toutes les puissances entières de tous les x, multiplie donc tous les monomes par $e^{2i\pi u}$ et, Q étant par définition invariant, multiplie tous les A_{u-p,n_i} par $e^{-2i\pi u}$. Tout spineur étant transformé en lui-même par cette rotation, *le spinexpanseur symétrique ne peut être réductible en spineurs que s'il est d'ordre entier.* Notons que l'effet de la rotation sur chaque terme a été défini par continuité, dans les mêmes conditions. Il s'ensuit que *même une correspondance multivoque est impossible* si u n'est pas entier.

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Sur les relations liant les densités de valeurs moyennes de la théorie de l'électron de Dirac.* Note ([1]) de M. **Gérard Petiau**.

L'équation d'ondes de l'électron de Dirac

$$\left[\left(-\frac{h}{2\pi i}\right)\frac{\partial}{\partial x^\mu}\gamma^\mu + im_0c\right]\psi_i = 0 \qquad (i=1, 2, 3, 4, \ \mu=1, 2, 3, 4, \ g_{\mu\mu}=+1, \ g_{\mu\nu}=0)$$

introduit quatre matrices hermitiennes γ_μ telles que

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2g_{\mu\nu},$$

qui permettent par leurs combinaisons de construire 16 matrices hermitiennes γ_A que nous écrivons

$$\gamma_0 = 1, \quad i\gamma_{\mu\nu} = i[\gamma_\mu\gamma_\nu - \delta_{\mu\nu}]; \quad i\gamma_{\mu\nu\rho} = i[\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho - \gamma_\mu\delta_{\nu\rho} + \gamma_\nu\delta_{\mu\rho} - \gamma_\rho\delta_{\mu\nu}];$$
$$\gamma_{1234} = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4.$$

En remarquant que γ_{1234} anticommute avec les quatre γ_μ, on voit que les matrices γ_A peuvent s'écrire également

$$\gamma_5 = \gamma_{1234}, \quad \gamma_0 = 1, \quad \gamma_\alpha, \quad i\gamma_{\alpha\beta} = i[\gamma_\alpha\gamma_\beta - g_{\alpha\beta}]; \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4, 5).$$

Les matrices γ_A peuvent être considérées comme des opérateurs et à ce titre représentent des grandeurs physiques de la théorie de l'électron dont les

---

([3]) Le mot *spineur* désigne ici le spineur d'ordre 1 (*spinvecteur*) et, plus loin, un spineur d'ordre quelconque (*spintenseur*). Le spineur d'ordre 1 doit être considéré comme étant à 4 composantes dans l'espace-temps, pour donner une définition générale

([1]) Séance du 18 février 1946.

densités de valeurs moyennes de la forme $\psi^{-}\gamma_A\psi$ s'expriment indifféremment comme des densités de l'espace R_4 ou de l'espace R_5. Les densités $j_\mu = \psi^+\gamma_\mu\psi$ (vecteur courant) et $\omega_2 = \psi^+\gamma_{1234}\psi$ (pseudo-invariant) de l'espace R_4 se rassemblent dans le vecteur courant $j_\alpha = \psi^+\gamma_\alpha\psi$ de R_5, tandis que le tenseur densité de moment électromagnétique $f_{\mu\nu} = \psi^+ i\gamma_{\mu\nu}\psi$ et le pseudo-vecteur spin $s_{\mu\nu\rho} = \psi^+ i\gamma_{\mu\nu\rho}\psi$ de R_4 se rassemblent dans le tenseur antisymétrique du second ordre $f_{\alpha\beta} = \psi^+ i\gamma_{\alpha\beta}\psi$ $(f_{\mu\nu} = f_{\mu\nu},\ f_{\mu\sigma} = s_{\nu\rho\sigma})$ de R_5, l'invariant $\omega_1 = \psi^+\psi$ restant le même dans les deux espaces. Au tenseur $f_{\rho\sigma}$ de R_4 se trouve associé un dual $f^*_{\mu\nu} = (1/2)\varepsilon_{\mu\gamma\rho\sigma}f^{\rho\sigma}$. Dans R_5 à $f^{\delta\varepsilon}$ est associé le dual $f_{\alpha\beta\gamma} = (1/2)\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\varepsilon\delta\varepsilon}f^{\delta\varepsilon}$ et au vecteur j_ε le dual

$$f_{\alpha\beta\gamma\delta} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}j^{\varepsilon}.$$

Les matrices γ_A nous permettent également de construire les densités tensorielles

$$T_{\mu,0} = \frac{h}{2\pi i}[\psi^+_\mu\psi - \psi^+\psi_\mu]; \qquad T_{\mu,\alpha} = \frac{h}{2\pi i}[\psi^+_\mu\gamma_\alpha\psi - \psi^+\gamma_\alpha\psi_\mu];$$

$$T_{\mu,\alpha\beta} = \frac{h}{2\pi i}[\psi^+_\mu i\gamma_{\alpha\beta}\psi - \psi^+ i\gamma_{\alpha\beta}\psi_\mu]; \qquad \left(\psi_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi,\ \psi^+_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi^+\right).$$

Nous désignerons par $\underline{\omega_1}$, $\underline{j_\alpha}$, $\underline{f_{\alpha\beta}}$, les dérivées $(\partial/\partial x^\mu)\omega_1$, $(\partial/\partial x^\mu)j_\alpha$, $(\partial/\partial x^\mu)f_{\alpha\beta}$.

La relation de Pauli liant deux systèmes de matrices γ^A permet d'obtenir, entre j_μ, $f_{\mu\nu}$, $s_{\mu\nu\rho}$, ω_1, ω_2, des relations qui, comme nous l'avons montré, se déduisent de quatre d'entre elles ([2]). En introduisant j_α et $f_{\alpha\beta}$, ses relations se ressemblent et s'écrivent

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} (1)\quad j_\alpha j^\alpha = \omega_1^2; & (2)\quad f_{\alpha\gamma}f^{\beta\gamma} = \omega_1^2 g^\beta_\alpha - j_\alpha j^\beta; \\ (3)\quad f_{\alpha\beta}j^\beta = \rho; & (4)\quad f_{\alpha\beta}j_\gamma + f_{\beta\gamma}j_\alpha + f_{\gamma\alpha}j_\beta = \omega_1 f_{\alpha\beta\gamma}; \\ (5)\quad f_{\alpha\beta\gamma}j^\gamma = \omega_1 f_{\alpha\beta}; & (6)\quad f_{\alpha\beta\gamma}f^{\gamma\delta} = \omega_1[g^\delta_\alpha j_\beta - g^\delta_\beta j_\alpha]. \end{cases}$$

On montre facilement que toutes ces relations se déduisent de (5) et (6), ce qui réduit à deux le nombre des relations fondamentales.

De même on obtient, entre les $T_{\mu,A}$, deux groupes de relations. Le premier s'écrit :

$$(\mathrm{II})\quad \begin{cases} (1)\quad T_{\mu,\alpha}j^\alpha = T_{\mu,0}\omega_1; \\ (2)\quad T_{\mu,\alpha\beta}f^{\beta\gamma} + f_{\alpha\beta}T_{\mu,}{}^{\beta\gamma} = 2T_{\mu,0}\omega_1 g^\beta_\alpha - T_{\mu,\alpha}j^\beta - T_{\mu,}{}^\beta j_\alpha; \\ (3)\quad T_{\mu,\alpha\beta}j^\beta + f_{\alpha\beta}T_{\mu,}{}^\beta = 0; \\ (4)\quad T_{\mu,\alpha\beta}j_\gamma + T_{\mu,\beta\gamma}j_\alpha + T_{\mu,\gamma\alpha}j_\beta \\ \qquad + T_{\mu,\gamma}f_{\alpha\beta} + T_{\mu,\alpha}f_{\beta\gamma} + T_{\mu,\beta}f_{\gamma\alpha} = T_{\mu,0}f_{\alpha\beta\gamma} + T_{\mu,\alpha\beta\gamma}\omega_1; \\ (5)\quad T_{\mu,\alpha\beta\gamma}j^\gamma + f_{\alpha\beta\gamma}T_{\mu,}{}^\gamma = T_{\mu,0}f_{\alpha\beta} + \omega_1 T_{\mu,\alpha\beta}; \\ (6)\quad T_{\mu,\alpha\beta\gamma}f^{\gamma\delta} + T_{\mu,}{}^{\gamma\delta}f_{\alpha\beta\gamma} = T_{\mu,0}[g^\delta_\alpha j_\beta - g^\delta_\beta j_\alpha] + \omega_1[g^\delta_\alpha T_{\mu,\beta} - g^\delta_\beta T_{\mu,\alpha}]. \end{cases}$$

Toutes ces relations se déduisent de [(II), (5)] et de [(II), (6)].

([2]) *Journal de Mathématiques* (sous presse).

Les relations du second groupe s'écrivent :

$$
(\mathrm{III})\left\{
\begin{aligned}
&(1)\quad T_{\mu,\alpha}\omega_1 - T_{\mu,0}j_\alpha = \frac{h}{2\pi} f_{\alpha\beta}\,\underline{j^\beta} = -\frac{h}{2\pi}\underline{f_{\alpha\beta}}\,j^\beta,\\
&(2)\quad T_{\mu,\alpha\beta}\omega_1 - T_{\mu,0}f_{\alpha\beta} = \frac{h}{2\pi}\left[\underline{j_\alpha}j_\beta + \underline{f_{\alpha\rho}}f_{\beta\sigma}g^{\rho\sigma}\right]\\
&\qquad = -\frac{h}{2\pi}\left[\underline{j_\beta}j_\alpha + \underline{f_{\beta\rho}}f_{\alpha\sigma}g^{\rho\sigma}\right],\\
&(3)\quad T_{\mu,\alpha}j_\beta - T_{\mu,\beta}j_\alpha = \frac{h}{2\pi}\left[\underline{\omega_1}f_{\alpha\beta} - \underline{j^\gamma}f_{\alpha\beta\gamma}\right]\\
&\qquad = -\frac{h}{2\pi}\left[\underline{f_{\alpha\beta}}\omega_1 - \underline{f_{\alpha\beta\gamma}}j^\gamma\right];\\
&(4)\quad T_{\mu,\gamma\delta\varepsilon}j_\alpha - T_{\mu,\alpha}f_{\gamma\delta\varepsilon} = \frac{h}{2\pi}\Big\{\left(f_{\gamma\alpha}\underline{f_{\delta\varepsilon}} + f_{\delta\alpha}\underline{f_{\varepsilon\gamma}} + f_{\varepsilon\alpha}\underline{f_{\gamma\delta}} - \omega_1\underline{f_{\gamma\delta\varepsilon\alpha}}\right)\\
&\qquad + g_{\alpha\gamma}\left(f_{\varepsilon\rho}\underline{f_{\delta\sigma}}g^{\rho\sigma} + j_\delta\underline{j_\varepsilon}\right) + g_{\alpha\delta}\left(f_{\gamma\delta}\underline{f_{\varepsilon\sigma}}g^{\rho\sigma} + j_\varepsilon\underline{j_\gamma}\right)\\
&\qquad + g_{\alpha\varepsilon}\left(f_{\delta\rho}\underline{f_{\gamma\sigma}}g^{\rho\sigma} + j_\gamma\underline{j_\delta}\right)\Big\},\\
&(5)\quad T_{\mu,\alpha\beta}f_{\delta\varepsilon} - T_{\mu,\delta\varepsilon}f_{\alpha\beta} = \frac{h}{2\pi}\Big\{\left(\underline{f_{\alpha\beta\varepsilon}}j_\delta - \underline{f_{\alpha\beta\delta}}j_\varepsilon + f_{\beta\delta\varepsilon}\underline{j_\alpha} - f_{\alpha\delta\varepsilon}\underline{j_\beta}\right)\\
&\qquad + g_{\alpha\delta}\left(\underline{\omega_1}f_{\beta\varepsilon} - \underline{f_{\beta\varepsilon\rho}}j^\rho\right) - g_{\alpha\varepsilon}\left(\underline{\omega_1}f_{\beta\delta} - \underline{f_{\beta\delta\rho}}j^\rho\right)\\
&\qquad - g_{\beta\delta}\left(\underline{\omega_1}f_{\alpha\varepsilon} - \underline{f_{\alpha\varepsilon\rho}}j^\rho\right) + g_{\beta\varepsilon}\left(\underline{\omega_1}f_{\alpha\delta} - \underline{f_{\alpha\delta\rho}}j^\rho\right)\Big\}.
\end{aligned}
\right.
$$

En utilisant les formules (I) et (II), on voit facilement que les relations [(III), (1), (2), (3)] se déduisent de [(III), (4)] et de [(III), (5)].

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Sur la section efficace de diffusion de particules de spin n/2*. Note (¹) de MM. **Jules Géhéniau** et **Jacques van Isacker**.

1. La *section efficace de diffusion simple*, sans absorption d'énergie par le diffuseur, d'un corpuscule de spin maximum $n/2$, peut se calculer par la méthode de variation des constantes, comme l'a utilisée Sauter [2] dans le cas du spin 1/2. Elle est égale, en première approximation, à

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
&S = k_0^2\,\Sigma'\left|\Sigma\, U^{s_1,\ldots,s_n}_{s'_1,\ldots,s'_n}(\vec{k}', \vec{k})\,A_{s_1,\ldots,s_n}\right|^2\left(\frac{k'}{k}\right),\\
&k_0 = (k^2+\varkappa^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \qquad \begin{pmatrix} s'_1, \ldots, s'_n = 1, 2 \\ s_1, \ldots, s_n = 1, 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\right.
$$

Chaque particule incidente se propage dans la direction $\vec{k}/k$ avec l'énergie k_0 et la masse $\varkappa$. La formule (1) donne le nombre de particules diffusées, par unité de flux incident, par unité de temps, par unité d'angle solide dans la

(¹) Séance du 4 février 1946.

(²) *Ann. d. Physik*, 18, 1933, p. 61.

direction $\vec{k}'/k'$. La diffusion se fait avec conservation d'énergie ($k'_0 = k_0$). Mais, pour $n > 2$, la masse au repos possède plusieurs valeurs propres; pour $n = 3$, par exemple, elle a deux valeurs propres $\varkappa_0$, $3\varkappa_0$, et le corpuscule diffusé peut se trouver dans un état de masse différent de l'état initial. C'est pourquoi la sommation Σ' doit être étendue non seulement aux $s_1, \ldots, s_n$ mais aussi aux divers états de masse. Les $A_{s_1, \ldots, s_n}$ sont les amplitudes des différents états de spin de l'onde incidente

$$\Sigma A^{s_1,\ldots,s_n} A_{s_1,\ldots,s_n} = 1, \qquad A^{s_1,\ldots,s_n} = \text{imaginaire conjuguée de } A_{s_1,\ldots,s_n}.$$

Enfin

$$(2) \qquad U^{s_1,\ldots,s_n}_{s'_1,\ldots,s'_n}(\vec{k}', \vec{k}) = N.N' \int \varepsilon^{\mu_1}_{s'_1} \ldots \varepsilon^{\mu_n}_{s'_n} U \varepsilon^{s_1}_{\mu_1} \ldots \varepsilon^{s_n}_{\mu_n} \exp. i(\vec{k}' - \vec{k})\vec{x}\, d(x),$$

où U est l'opérateur énergie d'interaction entre le diffuseur et la particule considérée; les ε sont des matrices dont les propriétés ont été étudiées par van Isacker ([3]), N et N' sont les facteurs de normalisation. Il faut sommer de 1 à 4 sur les indices μ répétés.

Une autre forme de (1) est

$$(3) \qquad S = k_0^2 A^r \left[\Sigma_{\varkappa'} U^{s'}_{r}(\vec{k}, \vec{k}').U^{s}_{s'}(\vec{k}', \vec{k}) \cdot \left(\frac{k'}{k}\right) \right] A_s,$$

où chaque indice est mis pour n indices semblables. Il faut sommer sur les indices répétés, et $\Sigma_{\varkappa'}$ indique une sommation étendue aux divers états de masse de la particule diffusée.

2. Lorsque le diffuseur n'agit que par son *champ électrique*,

$$(4) \qquad U = \frac{1}{n} V(x, y, z) \left(\sum_{\rho} I_1 \times \ldots \times \gamma^4_{\rho} \times \ldots \times I_n \right),$$

où les I sont des matrices unité, les γ^4 des matrices égales à la quatrième matrice de Dirac. L'expression (2) devient

$$(5) \qquad \left[\frac{N}{n} \sum_{\rho} \varepsilon^{\mu_1}_{s'_1} \varepsilon^{s_1}_{\mu_1} \ldots \varepsilon^{\mu_\rho}_{s'_\rho} \gamma^4_{\rho} \varepsilon^{s_\rho}_{\mu_\rho} \ldots \varepsilon^{\mu_n}_{s'_n} \varepsilon^{s_n}_{\mu_n} \right] V(\vec{k}', \vec{k}),$$

$$V(\vec{k}', \vec{k}) = \int V \exp i(\vec{k}' - \vec{k}) x\, d(x).$$

En désignant le crochet de (5) simplement par $E^{s}_{s'}(\vec{k}', \vec{k})$, (3) devient

$$(6) \qquad k_0^2 A^r \Sigma_{\varkappa'} \left[E^{s'}_{r}(\vec{k}, \vec{k}') E^{s}_{s'}(\vec{k}', \vec{k}) \right] \left| V(\vec{k}', \vec{k}) \right|^2 \frac{k'}{k} A_s.$$

3. Une première extension plus explicite des résultats connus s'obtient en considérant le cas de particules incidentes de *masse minimum* $\varkappa = \varkappa_0$, diffusées

---

([3]) *Comptes rendus*, **222**, 1946, p. 375.

sans changement de masse. La formule (6) donne alors, pour le coefficient D_n de $k_0^2\left|V(\vec{k'}, \vec{k})\right|^2$ de (6),

$$(7) \qquad \frac{1}{n} ab^{n-1} + \frac{n-1}{n} b^{n-2} + \frac{b^{n-2}}{2n^2} \frac{(\eta^2-1)^2}{\eta^2} \sin^2\Theta \sum_{\rho<\lambda} A^{s_1\ldots s_n} I^1_{\times\ldots\times} \Phi^\rho_{\times\ldots\times} \Phi^\lambda_{\times\ldots\times} I^n A_{s_1\ldots s_n},$$

$$a = 1 - \sin^2\frac{(\eta^2-1)}{\eta^2}\frac{\Theta}{2}, \qquad b = 1 + (\eta^2-1)\sin^2\frac{\Theta}{2},$$

$$\eta = \frac{k_0}{\chi}, \qquad \Phi = \sigma^1 \sin\varphi - \sigma^2 \cos\varphi.$$

Les σ sont les matrices habituelles de Pauli, l'axe z du trièdre trirectangle de référence est placé dans la direction k_z.

Remarquer que le troisième terme de (7) est nul lorsqu'une des constantes $A_{s_1\ldots s_n}$ seulement est différente de zéro, car, seuls, les termes 12 et 21 de la matrice Φ ne sont pas nuls.

4. Lorsque $n=1$, on retrouve le coefficient $D_1 = a$ relatif au corpuscule de Dirac. Pour $n=2$, on notera que

$$ab = 1 + \sin^2\Theta\frac{(\eta^2-1)^2}{4\eta^2}$$

et que le troisième peut s'écrire, en séparant les deux cas purs de spin zéro (constante C) et de spin un (constantes $B_{rs} = B_{sr}$),

$$\frac{(\eta^2-1)^2}{8\eta^2}\sin^2\Theta[-2|C|^2 + 2|B_{12}|^2 + (B^{11}B_{22}\exp 2i\varphi + \text{conj})],$$

d'où se tire, pour l'onde scalaire ($B_{rs}=0$), $D=1$, et pour $C=0$, la formule de Laporte [1].

5. Pour $n=3$, signalons que, lorsque la particule incidente est dans l'état de masse $3\chi_0$, avec le spin 1/2, la formule (6) redonne le cas de Dirac, comme il se doit. Le coefficient D_3 est relatif au cas où la particule incidente est dans l'état de masse minimum et ne tient compte que des transitions sans changement de masse. Dans le cas général, des transitions entre les deux états de masse sont possibles.

CHALEUR. — *Solution du problème du mur plan indéfini soumis, sur ses deux faces, à des températures périodiques*. Note de M. **Hippolyte Parodi**, présentée par M. Albert Caquot.

La température en un point quelconque du mur, au temps t, satisfait à l'équation

$$(1) \qquad h\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \frac{\partial\theta}{\partial t}$$

---

[1] *Phys. Rev.*, 54, 1938, p. 905.

qui admet comme solutions particulières

$$(2)\qquad K_1 e^{\mu x}\sin[2h\mu^2 t+\mu x+\nu_1]\qquad \text{et}\qquad K_2 e^{-\mu x}\sin[2h\mu^2 t-\mu x+\nu_2].$$

A. Supposons d'abord que les températures des deux faces sont respectivement $\theta_1 \sin\omega t$ sur la face $x=0$ et $\theta_2 \sin(\omega t+\varphi_2)$ sur la face $x=\delta$.

La somme des deux solutions de type (2) contient cinq paramètres arbitraires μ, K_1, ν_1, K_2, ν_2, en nombre suffisant pour permettre de satisfaire aux conditions aux limites, qui dépendent aussi de cinq paramètres ω, θ_1, 0, θ_2, φ_2.

En posant $2h\mu^2=\omega$, nous aurons

$$\mu=\pm\sqrt{\frac{\omega}{2h}},$$

et, en écrivant

$$X_1=\theta_1,\qquad X_2=\theta_2\cos\varphi_2,\qquad x=K_1\cos\nu_1,\qquad \zeta=K_2\cos\nu_2;$$
$$Y_1=0,\qquad Y_2=\theta_2\sin\varphi_2,\qquad y=K_1\sin\nu_1,\qquad \eta=K_2\sin\nu_2,$$

nous obtenons immédiatement

$$X_2=x\cos\mu\delta[e^{\mu\delta}-e^{-\mu\delta}]-y\sin\mu\delta[e^{\mu\delta}+e^{-\mu\delta}]+\theta_1 e^{-\mu\delta}\cos\mu\delta,$$
$$Y_2=x\sin\mu\delta[e^{\mu\delta}+e^{-\mu\delta}]+y\cos\mu\delta[e^{\mu\delta}-e^{-\mu\delta}]-\theta_1 e^{-\mu\delta}\sin\mu\delta,$$

Considérons deux vecteurs auxiliaires $\rho_1\underline{|\sigma_1}$ et $\rho_0\underline{|\sigma_0}$ définis par les relations

$$\rho_1\cos\sigma_1=\cos\mu\delta[e^{\mu\delta}-e^{-\mu\delta}],\qquad \rho_0\cos\sigma_0=e^{-\mu\delta}\cos\mu\delta,$$
$$\rho_1\sin\sigma_1=\sin\mu\delta[e^{\mu\delta}+e^{-\mu\delta}],\qquad \rho_0\sin\sigma_0=-e^{-\mu\delta}\sin\mu\delta,$$
$$\tang\sigma_1=\frac{e^{\mu\delta}+e^{-\mu\delta}}{e^{\mu\delta}-e^{-\mu\delta}};\qquad \tang\sigma_0=-\tang\mu\delta.$$

Le vecteur de composantes $X_2 Y_2$ représentant la température θ_2 de la surface $x=\delta$, est alors la résultante de deux vecteurs $K_1\rho\underline{|\sigma_1+\nu_1}$ et $\theta_1\rho_0\underline{|\sigma_0}$. Les vecteurs θ_2 et θ_1 étant donnés et les vecteurs $\rho_1\underline{|\sigma_1}$ et $\rho_0\underline{|\sigma_0}$ pouvant être immédiatement déterminés en fonction de $\mu\delta$, on voit que le vecteur $K_1\underline{|\nu_1}$ sera lui-même immédiatement déterminé par la construction du vecteur résultant.

B. Dans la pratique les températures connues ou relevées sont les températures de l'air en contact avec les deux faces du mur et non les températures mêmes des faces; il faut tenir compte des échanges superficiels de chaleur. Nous admettrons, d'après Ch. Fabry, les conditions aux limites suivantes :

$$\theta_1\sin(\omega t+0)=\left[\theta+\lambda_1\frac{\partial\theta}{\partial x}\right]_{x=0},\qquad \theta_2\sin(\omega t+\varphi_2)=\left[\theta+\lambda_2\frac{\partial\theta}{\partial x}\right]_{x=\delta},$$

les coefficients d'échange λ_1 et λ_2 sont, en général, différents étant données les conditions différentes de circulation de l'air le long des murs à l'intérieur et à l'extérieur des locaux.

En appelant r_1 et r'_1 deux vecteurs correspondant à la face $x=0$ et r_2 et r'_2

deux vecteurs correspondant à la face $x = \delta$, définis respectivement par les relations

$$1 + \lambda_1 \mu = r_1 \cos\tau_1, \quad 1 - \lambda_1 \mu = r'_1 \cos\tau'_1, \quad 1 + \lambda_2 \mu = r_2 \cos\tau_2, \quad 1 - \lambda_2 \mu = r'_2 \cos\tau'_2,$$
$$\lambda_1 \mu = r_1 \sin\tau_1, \quad -\lambda_1 \mu = r'_1 \sin\tau'_1, \quad \lambda_2 \mu = r_2 \sin\tau_2, \quad -\lambda_2 \mu = r'_2 \sin\tau'_2,$$

les formes à considérer pour la détermination des paramètres arbitraires k_1, v_1, k_2, v_2, seront les suivantes

$$k_1 r_2 e^{\mu\delta} \sin[2h\mu^2 t + \mu x + \tau_2 + v_1] + k_2 r'_2 e^{-\mu\delta} \sin[2h\mu^2 t - \mu x + \tau'_2 + v_2],$$
$$k_1 r_1 \quad \sin[2h\mu^2 t \quad + \tau_1 + v_1] + k_1 r'_1 \quad \sin[2h\mu^2 t \quad + \tau'_1 + v_2].$$

Le calcul s'effectuera exactement comme dans le premier cas considéré.

C. En supposant que les températures soient définies par des développements en série de Fourier, en fonction du temps, on déterminera, par les constructions indiquées ci-dessus, pour chaque fréquence, les valeurs des coefficients k_1, v_1, k_2, v_2 des développements considérés.

ÉLECTROMAGNÉTISME. — *Appareil matérialisant la trajectoire d'une particule électrisée dans un champ magnétique.* Note de M. **Julien Loeb**, présentée par M. Charles Maurain.

Le calcul des trajectoires des particules électrisées dans un champ magnétique, long et compliqué dès que le champ cesse d'être uniforme, peut être remplacé par l'application du principe suivant : un fil, dont on néglige le poids et la raideur, placé dans un champ magnétique et parcouru par un courant continu, occupe dans l'espace une figure superposable à la trajectoire d'une particule électrisée dans le même champ magnétique. L'appareil comportant ce fil et les accessoires serait appelé *hodoscope*. La démonstration la plus simple de l'identité des courbes (il en existe une autre fondée sur le calcul des variations liées) consiste à écrire les rayons de courbure respectifs R_1 et R_2 du fil et de la trajectoire de la particule :

$$R_1 = \frac{T}{JHn}, \tag{1a}$$

$$R_2 = \frac{mv}{eHn}; \tag{1b}$$

T, la force de traction du fil,
J, le courant dans le fil,
e et m, la charge et la masse en mouvement de la particule,
v, la vitesse de la particule,
Hn, la composante du champ binormale à la trajectoire.

Les deux courbes sont superposables si

$$\frac{T}{J} = \frac{mv}{e}. \tag{2}$$

L'équation (2) donne le rapport T/J correspondant à une particule donnée. Le fil matérialisera ainsi la trajectoire cherchée.

Au cours d'une expérience on a pris un fil d'argent de 2.10^{-3}cm de diamètre parcouru par un courant de 500 milliampères. Un électron de 10 000 V est représenté, dans ces conditions, par ce fil tendu à 18 dynes.

Des tractions de cet ordre sont facilement mesurables en produisant dans le fil, au moyen d'un champ magnétique périodique auxiliaire, des vibrations mécaniques stationnaires. C'est ainsi que cette traction de 18 dynes se traduit par des vibrations dont deux nœuds sont séparés par 6^{cm}, la fréquence étant de 64 p:s. La force de traction de 18 dynes a été retrouvée en appliquant la formule (1 *a*), où R, J et H ont été trouvés respectivement égaux à 7,2 cm, 0,5 ampère et 50 gauss.

On a également vérifié, en faisant varier J sans qu'il en résulte de déformation appréciable de la courbe, que le poids et la raideur du fil pouvaient être négligés.

La méthode permet de mesurer des tractions allant jusqu'à l'ordre de grandeur de deux dynes. La considération des similitudes permet d'étendre l'application de la méthode à des cas où le domaine spatial à explorer est trop petit ou trop grand.

Lorsque la charge et la quantité de mouvement de la particule restent invariables et lorsque l'on multiplie les dimensions linéaires du domaine spatial, si l'on divise le module du champ magnétique par un même facteur λ, on obtient deux trajectoires semblables.

Il y a des cas où une telle opération conduirait à des champs magnétiques irréalisables; on divisera alors et la traction T et le champ H par un même nombre, de façon à retrouver les deux figures semblables.

La méthode trouve son application pour la résolution de tous les problèmes qui ne comportent qu'un champ magnétique stationnaire, à l'exclusion du champ électrostatique, et notamment dans les cas suivants :

1° *Étude du mouvement des particules électrisées dans le champ magnétique terrestre.* — Les données numériques seraient les suivantes, dans le cas où l'étude porterait sur des ions Ca^+, animés d'une vitesse de 1000 km/sec ou sur des électrons doués d'une énergie de l'ordre de 10^8 eV.

La Terre serait remplacée (rapport de similitude $20/10^6$) par un électro-aimant donnant aux pôles un champ de 5000^G à 30^{cm} du centre. Un fil parcouru par un courant de 500 mA et tendu à 18 dynes représentera une des particules ci-dessus désignées. On aura ainsi un moyen commode, remplaçant les calculs de Störmer, de déterminer les latitudes extrêmes accessibles aux particules électrisées dont la quantité de mouvement connue sera de l'ordre de 10^{-14} C. G. S. ou plus.

2° *Étude des lentilles électroniques magnétiques.* — L'appareil permet de trouver directement les couples de points images l'un de l'autre : en effet il existe une infinité de trajectoires différentes passant par deux points images

l'un de l'autre. Ce cas se traduit dans l'appareil par l'instabilité du fil sous l'effet de très petits déplacements des extrémités.

3° *Étude du mouvement des ions dans les appareils de Chimie nucléaire* (focalisation magnétique dans les cyclotrons, spectrographes de masse etc.).

ÉLECTROTECHNIQUE. — *Sur l'autoamorçage des machines d'induction débitant sur des capacités.* Note [1] de M. **Émile Pillet**, présentée par M. Joseph Pérès.

J'ai montré [2] que l'application de la transformation de Laplace aux équations des machines d'induction polyphasées conduisait à la séparation des systèmes homopolaire, direct et inverse.

On peut utiliser ces calculs à l'étude de l'autoamorçage de ces machines branchées sur un réseau capacitif.

Si l'on suppose le réseau, comme la machine, parfaitement équilibrés, les systèmes homopolaire et inverse ne conduisent à aucun amorçage possible; il reste le système direct, auquel il faut ajouter, dans le cas d'un réseau comportant la résistance r et la capacité C branchées en parallèle, trois relations de la forme

$$(1)\qquad i_a+\frac{u_a}{r}+C\frac{du_a}{dt}=0.$$

En négligeant les états initiaux, qui n'interviendront pas par la suite, il vient, avec les mêmes notations,

$$(2)\qquad X_d+\left(\frac{1+prC}{r}\right)Y_d=0,$$

que nous portons dans le système (IV_d) de la Note précédente; il vient alors

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left[(R_a+p\mathcal{L}_a)\frac{1+prC}{r}+1\right]Y_d-\frac{3}{2}p\mathfrak{M}\varepsilon\mathfrak{X}_{d-}=0,\\ &\frac{3}{2}(p-j\omega_r)\frac{1+prC}{r}\mathfrak{M}\varepsilon^{-1}Y_d-[R_1+(p-j\omega_r)\mathcal{L}_1]\mathfrak{X}_{d-}=0.\end{aligned}\right.$$

Ce qui conduit à l'équation en p

$$(4)\qquad \left[(R_a+p\mathcal{L}_a)\frac{1+prC}{r}+1\right][R_1+(p-j\omega_r)\mathcal{L}_1]-\frac{9}{4}p(p-j\omega_r)\frac{1+prC}{r}\mathfrak{M}^2=0,$$

c'est-à-dire

$$(5)\qquad p^3+\left(\frac{1}{rC}+\frac{R_a}{\sigma\mathcal{L}_a}+\frac{R_1}{\sigma\mathcal{L}_1}-j\omega_r\right)p^2 +\left[\frac{R_aR_1}{\sigma\mathcal{L}_a\mathcal{L}_1}+\frac{1}{rC}\left(\frac{R_1}{\sigma\mathcal{L}_1}+\frac{R_a}{\sigma\mathcal{L}_a}+\frac{r}{\sigma\mathcal{L}_a}\right)-j\omega_r\left(\frac{1}{rC}+\frac{R_a}{\sigma\mathcal{L}_a}\right)\right]p +\frac{(R_a+r)(R_1-j\omega_r\mathcal{L}_1)}{rC\sigma\mathcal{L}_a\mathcal{L}_1}=0,$$

(1) Séance du 13 août 1945.

(2) *Comptes rendus*, 222, 1946, p. 384.

Il n'y a pas d'autoamorçage si les trois racines de cette équation ont leur partie réelle négative.

La présence de coefficients complexes ne permet pas d'utiliser les critériums simples de Routh ou d'Hurwitz.

La condition d'autoamorçage limite se traduit par l'existence d'une racine imaginaire pure, les deux autres ayant toujours leur partie réelle négative.

Posons donc $p = j\omega$, négligeons, pour simplifier, R_a et prenons les quatre paramètres réduits

$$(6) \qquad x = \frac{\omega}{\omega_r}, \qquad \alpha = \frac{1}{\sigma \mathcal{L}_a C \omega_r^2}, \qquad \beta = \frac{1}{2 C \omega_r}, \qquad \gamma = \frac{R_1}{\sigma \mathcal{L}_1 \omega_r};$$

il vient

$$(7) \qquad -j[x^3 - x^2 - (\beta\gamma + \alpha)x + \alpha] - [(\beta + \gamma)x^2 - \beta x - \sigma\alpha\gamma] = 0,$$

c'est-à-dire que les deux équations (8)

$$(8) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x^3 - x^2 - (\beta\gamma + \alpha)x + \alpha = 0, \\ (\beta + \gamma)x^2 - \beta x - \sigma\alpha\gamma = 0 \end{array} \right.$$

doivent avoir une racine commune réelle.

Si nous considérons α, β et γ comme les coordonnées d'un point figuratif du système machine-réseau, l'ensemble des points d'autoamorçage limite constitue une surface dont les équations (8) sont les équations paramétriques en fonction du paramètre x.

Cette surface ne dépend plus que du coefficient de dispersion σ. On peut l'étudier en la coupant par des plans $\gamma = \text{const.}$ ou $\alpha = \text{const.}$ On obtient les résultats principaux suivants :

1° La solution classique (telle qu'elle est, par exemple, développée par J. Fallou dans son cours d'*Électrotechnique générale*, tome II), basée sur l'intersection d'une parabole représentant le réseau et de la circonférence caractéristique de la machine, donne une condition suffisante, mais non nécessaire, de non-amorçage;

2° Si le point figuratif est à l'intérieur de la surface, l'autoamorçage se produit, la machine débite, le débit tend à croître indéfiniment, mais la machine se sature, son coefficient de dispersion σ augmente, la surface se déforme en se contractant jusqu'à passer par le point figuratif et le débit reste fini et stable;

3° Si l'on tient compte de R_a, la discussion est analogue, mais un peu plus compliquée;

4° Si l'on suppose un réseau comprenant maintenant résistance et capacité en série, au lieu d'être en parallèle, on incorpore R_a à r, on change la définition de la variable réduite β qui devient $\beta = r/\sigma\omega_r\mathcal{L}_a$ et l'on obtient le système (9)

$$(9) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x^3 - x^2 - (\sigma\beta\gamma + \alpha)x + \alpha = 0, \\ (\beta + \gamma)x^2 - \beta x - \sigma\alpha\gamma = 0, \end{array} \right.$$

qui se traite exactement comme le système (8) précédent.

SPECTROSCOPIE. — *Spectre d'émission de l'oxygène dans le xénon.* Note de Mme **Renée Herman**, présentée par M. Aimé Cotton.

Lors d'un travail sur les raies interdites de l'atome neutre d'oxygène [1], on a pu mettre en évidence un spectre continu, de petite étendue spectrale, d'intensité décroissante vers les courtes longueurs d'onde et partant de la raie aurorale 5577 Å. L'intensité de ce spectre continu était très faible par rapport à celle de la raie verte. Il a été attribué, dans ce travail, à la molécule instable AO.

J'ai cherché à obtenir un spectre continu analogue, mais plus intense, en utilisant des mélanges d'oxygène avec d'autres gaz rares. L'objet de la présente Note est d'exposer les résultats préliminaires concernant le xénon contenant de petites quantités d'oxygène.

La préparation du tube à décharge a été effectuée suivant une méthode décrite précédemment [2]. Ce tube était rempli de xénon sous une pression de 9mm de mercure. On pouvait ajouter de petites quantités d'oxygène par décomposition par la chaleur d'un peu de permanganate de potassium contenu dans une tubulure latérale. L'addition d'oxygène a pour effet de colorer la décharge en vert par suite de l'apparition d'un système de bandes intenses, dégradées vers le rouge et situées entre 4900 et 5566 Å. Ce système est bordé, du côté des grandes longueurs d'onde, par la raie 5577 Å de OI, également très intense. Contrairement à ce qu'on observe dans l'argon, l'intensité de ce système est considérablement plus grande que celle de la raie verte. La faible dispersion employée ne permet pas de séparer toutes les bandes de ce système, surtout vers les grandes longueurs d'onde. Le tableau ci-dessous indique la classification provisoire des têtes des bandes observées; elles sont, dans l'ensemble, mal définies et la précision des mesures individuelles est de l'ordre de 1 à 2 angströms seulement.

v'. v''....	0.	1.	2.	3.	4.
0...........	–	5149,9 Å	5230,0 Å	5305,9 Å	5376,8 Å
1...........	–	5113,7	5193,2	5268,0	–
2...........	5001,9 Å	5084,9	5163,3	–	–
3...........	4978,9	5061,2	–	–	–
4...........	4961,3	–	–	–	–

La bande (1,0) est masquée par la raie 5028,3 de XI. La bande (0,0) semble décalée vers les courtes longueurs d'onde; il est possible que la bande observée à cet endroit appartienne, en réalité, à un autre système. Les séquences $v''-v'=5$ et 6 sont très intenses, mais la dispersion employée n'a pas permis de séparer les bandes individuelles. La séquence $v''-v'=7$ a un aspect anormal, probablement par suite de la dissociation de l'état inférieur dans les

(1) L. Herman et Mme R. Herman, *Annales de Géophysique*, 1, 1944, p. 165.

(2) L. Herman et Mme R. Herman, *Source d'émission à spectre continu* [*Cahiers de Physique* (sous presse)].

progressions $v' > 0$. Les valeurs de ω_0 sont faibles pour les niveaux supérieur (A) et inférieur (B) et fournissent des énergies de dissociation D (niveau A) $\sim 0,05$ eV et D (niveau B) $\sim 0,23$ eV. Le rapport des valeurs de ω_0 pour les états inférieur et supérieur a une valeur en accord avec la dégradation des bandes vers le rouge. La valeur de l'énergie de dissociation du niveau inférieur, obtenue à partir du tableau ci-dessus, permet de déterminer la limite du système vers les grandes longueurs d'onde. Cette limite est en bon accord avec l'observation.

Étant donnée la faible énergie de dissociation du niveau supérieur, la limite du système du côté des grandes longueurs d'onde se trouvera au voisinage de la fréquence atomique correspondante. Cette raie atomique est de toute évidence la raie interdite 5577 Å de OI.

Le mélange gazeux contenu dans le tube présente une phosphorescence de longue durée, pouvant atteindre plusieurs secondes. Le spectre de cette phosphorescence contient le système décrit ci-dessus sans raies de xénon. Le fait que la phosphorescence de ce système est de longue durée conduit à penser que l'émission ne peut provenir, ni de l'excitation électronique d'une molécule préexistante, ni d'une recombinaison entre ions moléculaires et électrons. On est donc conduit à admettre que ce système, que j'appellerai *système vert* de l'oxygène, résulte de l'une des deux réactions de recombinaison atomique :

$$\text{(1)}\qquad O(^3P) + O(^1S) \rightarrow O^2(A) \rightarrow O^2(B) + h\nu,$$

$$\text{(2)}\qquad X(s_5 \text{ ou } s_3) + O(^1S) \rightarrow XO(A) \rightarrow XO(B) + h\nu.$$

Seule l'analyse rotationnelle de ce système pourra montrer si l'on a affaire à une molécule homonucléaire ou hétéronucléaire.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Réseaux métastables dans le système palladium-or-hydrogène*. Note [1] de MM. **Jacques Bénard** et **J. Talbot**, présentée par M. Albert Portevin.

On sait que la dissolution de l'hydrogène dans le palladium entraîne un accroissement des dimensions du réseau cubique à faces centrées sans changement du type de structure. La variation du paramètre en fonction de la concentration en hydrogène présente, à la température ordinaire, une lacune importante qui délimite deux domaines de solubilité distincts : phase α ($3,882 < a < 3,885$ Å) et phase β ($4,01 < a < 4,04$ Å).

Des recherches récentes ont montré [2] qu'il est possible d'extraire l'hydrogène à la température ordinaire sans que le réseau recouvre ses dimensions primitives, et que ces structures métastables doivent subir un chauffage modéré pour revenir à l'équilibre. Nous nous sommes proposé de rechercher dans quelle mesure la substitution des alliages de palladium et d'or au palladium

---

[1] Séance du 18 février 1946.

[2] Chaudron, Portevin et Moreau, *Comptes rendus*, 207, 1938, p. 235; Chaudron, Bénard et Michel, *ibid.*, 218, 1944, p. 913.

pur modifie la nature et la stabilité des phases décrites dans ces travaux.

Deux alliages, renfermant respectivement 11 % et 25 % Au, ont été préparés au four à induction à partir de métaux très purs. Après réduction en feuilles et recuit d'homogénéisation, les échantillons étaient chargés d'hydrogène par électrolyse dans un bain acide sous une faible densité de courant. L'examen aux rayons X était fait par la méthode des diagrammes en retour avec étalon (Kα du cuivre, étalon d'argent); on opérait le plus souvent ces mesures à une température voisine de 0° pour éviter toute transformation au cours de la pose.

L'étude des diagrammes obtenus montre que, dans l'alliage renfermant 25 % Au, le paramètre peut prendre toutes les valeurs intermédiaires entre 3,91 Å (alliage exempt d'hydrogène) et 4,01 Å (alliage saturé d'hydrogène). Contrairement au palladium pur, les alliages Pd-Au ne forment donc avec l'hydrogène qu'une seule phase.

Ce résultat est à rapprocher du fait que la discontinuité α-β du palladium pur diminue lorsque la température s'élève et disparaît au delà de 310° ([3]). Nous montrons donc que la dissolution de l'or dans le palladium a pour effet d'abaisser ce point critique jusqu'à la température ordinaire.

Les structures dilatées ainsi obtenues sont beaucoup moins stables que celles qu'on obtient dans les mêmes conditions avec le palladium pur. Leur instabilité est d'autant plus grande que la teneur en or est plus élevée et, dans le cas de l'alliage à 25 %, le paramètre élevé atteint par saturation ($a = 4{,}01$ Å) revient spontanément à sa valeur initiale à la température de 20°.

Le réseau présente après cette évolution une très grande régularité, et les anneaux de Debye-Scherrer correspondant aux grands angles de Bragg donnent une bonne résolution du doublet $K_{\alpha_1\text{-}\alpha_2}$. L'alliage à 11 % possède, au contraire, après retour spontané dans les mêmes conditions, des anneaux de Debye-Scherrer très flous. Ceci témoigne de l'existence de variations locales du paramètre cristallin de part et d'autre d'une valeur moyenne et prouve que le réseau des alliages à faible teneur en or se restaure plus difficilement.

Nous avons suivi, parallèlement à l'évolution de la structure, la désorption de l'hydrogène au moyen de pesées échelonnées faites avec une microbalance. La sensibilité atteinte était de l'ordre de $0^{cm^3},3$ d'hydrogène pour des échantillons contenant initialement 200^{cm^3} environ. On obtient dans ces conditions des courbes de désorption en fonction du temps bien définies.

La désorption est très rapide au début. Elle consiste en un départ d'hydrogène, particulièrement abondant sur les parties anguleuses du métal. Ce départ fait place progressivement à une lente combustion au contact de l'oxygène de l'air et, au bout de quelques jours, on constate que la totalité de l'hydrogène dissous dans le métal s'est éliminée; la vitesse de désorption dépend en outre de nombreux facteurs : température, état de la surface, nature des traitements antérieurs etc. On constate que, dans les mêmes conditions de température, la pente des courbes est d'autant plus grande que les alliages sont plus riches en or.

([3]) Brüning et Sieverts, *Z. phys. Chem.*, A, **163**, 1932, p. 432.

L'accroissement de la teneur en or accroît donc simultanément l'instabilité de la structure et la vitesse de départ de l'hydrogène.

Aux températures voisines de 0°, la désorption spontanée de l'hydrogène se poursuit avec une vitesse moindre. La structure ne subissant dans ces conditions aucune modification, il est donc possible d'obtenir, au bout d'un certain temps, des phases métastables à paramètre dilaté ($a = 4{,}01$ Å) qui sont totalement privées d'hydrogène. Un chauffage de quelques minutes à 50° provoque le retour du paramètre à sa valeur d'équilibre ($a = 3{,}91$ Å).

Ces mesures démontrent à nouveau qu'un réseau dilaté par insertion d'atomes d'hydrogène conserve sa déformation après leur départ lorsque celui-ci a eu lieu à une température suffisamment basse.

DIFFUSION MOLÉCULAIRE. — *Spectres de vibrations des sulfates orthorhombiques naturels. Étude expérimentale de la barytine et de la célestine.* Note ([1]) de Mlle **Lucienne Couture**, présentée par M. Aimé Cotton.

Nous avons étudié ([2]) l'effet Raman des cristaux de barytine et de célestine dans les six cas d'observation possibles. Les notations sont définies dans une Note antérieure ([3]). Les spectres de barytine sont plus beaux que ceux de célestine et ont permis des mesures photométriques d'intensité. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant.

Barytine.

Fréquence en cm⁻¹.	Intensité relative, cas 2 et 4.	1 et 3.	5 et 6.	Polarisation, cas 1.	2.	3.	4.	5.	6.	Type.	
67.......	–	–	–	0	–	0	–	–	–	A_{1g}	
77.......	–	–	–	0	0	0	–	0	0	A_{1g}	
92.......	–	–	–	∞	–	∞	0	∞	0	B_{2g}	
131.......	–	–	–	0?	–	0	–	–	–	A_{1g} ?	
149.......	–	–	–	∞	–	0	–	0	–	B_{3g}	
193.......	–	–	–	∞	∞	∞	0	∞	0	B_{2g}	
				–	0	–	–	–	–	A_{1g} ?	
453.......	0,3	0,4	1,4	0	0	0	0	0	0	A_{1g}	
	–	0,1	–	∞	∞	∞		∞		B_{2g}	E_2
462,5....	–	1	–	0	0	∞	∞	∞	∞	B_{1g}	
622,5....	–	0,1	–	∞	∞	0	∞	0	∞	B_{3g}	
	0,09	0,3	0,09	0	0		0		0	A_{1g}	E_3
630......	0,15	0,07	0	0	0	0	0	–	–	A_{1g}	
647......	–	0,15	–	∞	∞	∞	0	∞	0	B_{2g}	
988......	4,5	4,5	8	0,03	0,02	0,03	0,04	0,01	0,01	A_{1g}	E_1
1084.....	–	0,05	–	∞	∞	0	∞	0	∞	B_{3g}	
1105.....	0,02	0,02	0,2	0	0	0	0	0	0	A_{1g}	
1138.....	–	0,2	–	∞	∞	∞	0	∞	0	B_{2g}	E_4
1145.....	0,4	0,03	0,03	0	0	0		0		A_{1g}	
1167.....	–	0,15	–	∞	∞	∞	0	∞	0	B_{2g}	

([1]) Séance du 11 février 1946.

([2]) Pour l'étude théorique, voir *Comptes rendus*, 222, 1946, p. 388.

([3]) L. Couture, *Comptes rendus*, 218, 1944, p. 669.

Célestine.

Fréquences en cm⁻¹.	Polarisation, cas 1.	2.	3.	4.	5.	6.	Type.	
~ 50	o?	–	o	–	o	–	A_{1g}	
~190	–	–	–	o	–	–	B_{2g} ou A_{1g}	
~240	–	–	–	∞	o	–	B_{3g}	
453	∞	∞	o	o	o	o	A_{1g}, B_{2g}	E_2
458	o	o	∞	∞	∞	∞	B_{1g}	
617	o	–	o	o	o	o	A_{1g}	E_3
624	∞	∞		∞		∞	B_{3g}	
637	o	–	–	o	–	–	A_{1g}	
656	∞	∞	∞	o	∞	o	B_{2g}	
999	o	o	o	o	o	o	A_{1g}	E_1
1094	∞	∞	o	∞	o	∞	B_{3g}	E_4
1103	o	o		o		o	A_{1g}	
1159	>1	~1	>1	<1	>1	<1	A_{1g}, B_{2g}, ...	
1185	∞	∞?	–	o	∞	o	B_{2g}	

Le spectre de la célestine, un peu moins complet, est tout à fait semblable à celui de la barytine.

Dans le spectre des vibrations internes, on peut remarquer que la raie B_{2g} de l'ensemble E_1, la raie B_{3g} de l'ensemble E_2, la raie B_{1g} des ensembles E_3 et E_4 manquent, ce qui s'explique par la théorie des intensités relatives développée dans la Note précédente. Toutes les autres raies prévues sont présentes, sauf une, de type B_{2g}, dans l'ensemble E_3.

Ensemble E_1. — Il se produit une variation d'intensité de la raie 999 cm⁻¹, qui révèle une anisotropie nette de l'ion dans la direction OZ.

Ensemble E_2. — Les intensités relatives expérimentales des raies sont voisines des intensités calculées, comme le montre le tableau suivant, où nous avons fixé arbitrairement égale à 1 l'intensité de la raie A_{1g} dans les cas 1 et 3.

Type de la raie	B_{3g}.	B_{2g}.	A_{1g}. cas 2 et 4.	A_{1g}. cas 1 et 3.	B_{1g}.	A_{1g}. cas 5 et 6.
Valeurs calculées	0,09	0,26	0,83	1	2,91	3,65
Valeurs expérimentales	–	0,3	0,7	1	2,5	3,4

Ensemble E_3. — La correspondance entre valeurs expérimentales et valeurs calculées est moins bonne; elle permet cependant de fixer l'angle θ, qui détermine la façon dont cesse la dégénérescence.

Ensemble E_4. — Ces vibrations sont très perturbées, comme le montre la divergence entre valeurs calculées et expérimentales. Cependant on peut proposer pour l'angle θ une valeur approximative qui est confirmée par l'étude des vibrations de cet ensemble au moyen des spectres de réflexion infrarouges (¹) (la valeur de θ permet d'expliquer le fait qu'on trouve trois maxima

(¹) Cl. Schaefer et M. Schubert, *Ann. der Physik*, (4), 50, 1916, p. 283.

au lieu des cinq prévus par les considérations de symétrie). On peut alors établir une correspondance complète entre spectres Raman et infrarouges.

D'une facon générale cette étude montre que, dans la barytine et la célestine, l'ion SO_4 est peu déformé; sa symétrie est abaissée à la symétrie C_s du champ qui l'entoure, avec une anisotropie nette dans la direction OZ; l'effet de la perturbation se manifeste beaucoup plus dans les vibrations de déformation, ce qui est normal pour un ion aussi compact que l'ion SO_4.

CHIMIE GÉNÉRALE. — *L'insolubilisation photochimique du soufre. Densité des cristaux insolubles. Étude sur la fusion instantanée des trois variétés cristallisées du soufre.* Note (¹) de MM. **Charles Dufraisse**, **Christian Pinazzi** et **Jean Baget**, présentée par M. Marcel Delépine.

Nous avons déterminé deux des principales constantes du soufre insoluble, cristallisé, d'origine photochimique : la densité et le point de fusion.

a. La densité a été prise par flottement dans un liquide de densité identique, obtenu en mélangeant par tâtonnement du bromoforme et du pentachloréthane. Dans la pratique on déterminait au thermostat les densités limites pour lesquelles la poussière en suspension se rassemblait respectivement en haut et en bas, par repos de 48 heures.

Une des causes d'erreur de la méthode est due aux courants de convection qui mettent en suspension les particules, surtout les plus fines, alors qu'elles devraient rester à la surface ou en dépôt, suivant la densité du liquide. L'inconvénient n'existerait pas si la thermostase du bain était absolue; mais la fixité idéale de la température est irréalisable et l'on est obligé de compter avec des oscillations, si petites soient-elles. L'effet perturbant est d'autant plus accentué que la différence est plus faible entre les densités du liquide et de la poudre, c'est-à-dire que l'ajustage du mélange des deux liquides a été mieux réussi. La centrifugation réduirait ce défaut en diminuant la durée de l'observation, mais alors la température serait moins bien définie et l'on ne gagnerait guère sur l'exactitude.

Il nous a d'ailleurs paru vain de chercher une extrême précision, la poudre n'étant pas rigoureusement homogène par sa densité; on observe en effet, à une température déterminée par tâtonnement, que des particules restent en surface, alors que d'autres se déposent. Le même fait se constate pour d'autres cristaux bien définis, comme pour la poudre de chlorure de sodium, par exemple.

Dans ces conditions, nous nous sommes contentés de déterminer la densité moyenne de la part principale, en négligeant une faible fraction un peu plus légère.

(¹) Séance du 18 février 1946.

Les observations étaient faites en tubes scellés sous vide, pour éviter les gaz adsorbés. A la température de 16° ± 0,1, toute la poussière est en surface dans un mélange de densité D_4^{16} 2,070 et la quasi-totalité se dépose dans un mélange de densité D_4^{16} 2,068. En conséquence nous avons adopté, pour la densité du soufre insoluble photochimique, la valeur arrondie D_4^{16} 2,07. On trouve dans la littérature, pour le soufre insoluble d'origine thermique, les valeurs 1,87 (Petersen, 1891) et 1,892 (Wigand, 1907).

Dans d'autres essais, on a déterminé la température du mélange à laquelle les particules en surface passaient au fond. Les valeurs trouvées ont été plus élevées, mais aussi plus variables. La première méthode nous semble plus sûre.

b. Les points de fusion ont été pris par la méthode instantanée, au bloc de Maquenne avec surface d'or. Ce procédé convient spécialement bien, comme on le sait, pour tous les cristaux instables, quelle que soit la cause de cette instabilité : variations polymorphiques, efflorescence, transformations chimiques; il n'a pourtant pas encore été utilisé à notre connaissance pour le soufre. Nous en avons profité pour lui soumettre les variétés prismatique et rhombique, en même temps que la variété insoluble.

Les trois formes, quand on les chauffe lentement, fondent chacune dans un intervalle de température étendu et mal défini. Ceci n'a rien de surprenant puisque le liquide de fusion évolue pour son compte et, par suite, n'est immédiatement en équilibre avec aucune des formes cristallisées : à partir des formes solubles, il se charge de la variété dite insoluble et, à partir de la forme insoluble, il rétrograde en devenant partiellement soluble.

A notre étonnement, seul le soufre monoclinique a une fusion instantanée très nette : elle se situe à 122° ± 0°,5. Fait singulier, les cristaux orthorhombiques fondent aussi, quoique moins franchement, à 122°. On se serait attendu à observer, comme il arrive souvent dans les cas de polymorphisme, une première fusion basse, suivie aussitôt de resolidification sous la forme à fusion haute. Nous croyons l'avoir constaté une fois, mais sans réussir à le reproduire. Peut-être le passage de la forme orthorhombique à la forme monoclinique est-il plus rapide que la fusion, et alors on n'obtiendrait que le point de fusion de la variété monoclinique, quelle que soit la vitesse du chauffage. De toute manière il en résulte que les méthodes non instantanées de détermination des points de fusion n'ont pas grand sens pour le soufre. Ainsi s'expliquent les écarts entre les données des auteurs (112°,8 à 115° pour les cristaux orthorhombiques, et 117°,4 à 120° pour l'autre), écarts inadmissibles sans cela pour un corps aussi facile à obtenir pur et une région de températures aussi simples à repérer exactement que le voisinage de 100°.

Quant aux cristaux insolubles leur fusion instantanée est insuffisamment nette pour être indiquée à la précision du demi-degré, comme celle des cristaux prismatiques; nous la situons vers 180°, à deux degrés près. Tous les

échantillons de soufre insoluble, d'apparence cristallisée ou non, même le soufre insoluble d'origine thermique, fondent au même point et de la même manière. Ceci est une forte présomption pour que tous, y comprise la variété non photochimique, soient identiques; par suite, le soufre insoluble d'origine photochimique n'est probablement pas différent de celui d'origine thermique, et ce dernier, contrairement à sa dénomination classique de *soufre amorphe*, serait cristallisé.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Quelques remarques sur le processus électrochimique de la β-hydroxycarbonylation*. Note (1) de MM. **Henry Gault** et **Paul Rumpf**, présentée par M. Marcel Delépine.

L'un de nous (2) a analysé le mécanisme de la réaction de β-hydroxycarbonylation en milieu alcalin et l'a interprété d'un point de vue purement chimique. Nous nous proposons maintenant de compléter cette analyse, en précisant l'influence des phénomènes d'ionisation. On sait en effet que la vitesse de la réaction étudiée varie considérablement en fonction du pH, même si toutes les autres conditions sont maintenues identiques (3), (4).

Avec l'énolate de potassium de l'ester oxalacétique, cette condensation s'effectue déjà parfaitement bien au voisinage de la neutralité; dans la solution aqueuse qui ne rougit pas la phtaléine, il ne se manifeste, pour ainsi dire, aucune hydrolyse du sel alcalin, grâce à l'accumulation de groupements électronégatifs et à la mésomérie céto-énolique qui stabilisent l'anion :

$$C_2H_5O—CO—CO—C^-H—CO—OC_2H_5 \leftrightarrow C_2H_5O—CO—\overset{O^-}{\overset{|}{C}}=CH—CO—OC_2H_5.$$

Comme composé associable on a pu prendre, par exemple, le chloral, entièrement hydraté en solution aqueuse. Un excès d'acali (susceptible de transformer l'hydrate en anion $Cl_3C—CH\langle^{O^-}_{OH}$, autour de pH 11) ne paraît pas nécessaire. Ces observations conduisent à l'hypothèse d'une *fixation de la molécule associable à l'état d'hydrate sur l'ion énolique de la substance associante* (2).

D'après la théorie électronique, le groupement fonctionnel aldéhyde $R—CH=O \leftrightarrow R—C^+H—O^-$ comporte un carbone relativement peu basique, à cause de l'hydrogène qui empêche un relâchement parfait de l'octet. Cette faible basicité, inférieure à celle du carbonyle cétonique, favorise la fixation

(1) Séance du 18 février 1946.
(2) H. Gault, *Comptes rendus*, **222**, 1946, p. 396.
(3) T. Enkvist, *J. prakt. Chem.*, 2e série, **149**, 1937, p. 65.
(4) K. Koelichen, *Z. phys. Chem.*, **33**, 1900, p. 129.

des ions négatifs de petite électro-affinité (tels que HO^-, CN^-, H_2N^- et, en particulier, R_2HC^- ou R_3C^-), anions correspondant à des acides qui présentent de très petites constantes de dissociation. L'influence électrochimique des divers atomes voisins du carbonyle exalte ces propriétés additives dans le cas du formol, des aldéhydes halogénés, du glyoxal etc. L'expérience montre effectivement que, si l'on fait réagir ensemble un aldéhyde et une cétone, *le composé associé est celui qui a le plus d'aptitude à l'hydratation*, c'est-à-dire *généralement l'aldéhyde*.

Alors que l'aldéhyde associable n'est pas nécessairement susceptible de prendre la forme énol, un carbone voisin du groupement fonctionnel de la molécule associante doit porter un hydrogène mobile. Les recherches cinétiques d'Enkvist ([3]) ont montré que, sur un composé assez difficilement énolisable, tel que le cyanacétamide (choisi comme exemple pour des raisons de commodité expérimentale), la fixation du formaldéhyde s'effectue, *molécule à molécule*, avec une vitesse proportionnelle à la *première puissance de la concentration de l'ion* HO^- dans la solution aqueuse, ce qui est bien conforme au mécanisme proposé. Cette lente réaction primaire est suivie d'un départ rapide de l'ion HO^-, avec neutralisation ou énolisation :

$$NC{-}CH_2{-}CO{-}NH_2 + HO^- \rightleftharpoons H_2O + NC{-}C^-H{-}CO{-}NH_2 \leftrightarrow NC{-}CH{=}C(NH_2){-}O^-$$

$$\xrightarrow{+H_2C(OH)_2} NC{-}CH(CH_2{-}OH){-}C(NH_2)(OH){-}O^- \begin{cases} \xrightarrow{-HO^-} NC{-}CH(CH_2{-}OH){-}CO{-}NH_2 \\ \xrightarrow{-H_2O} NC{-}C(CH_2{-}OH){=}C(NH_2){-}O^- \end{cases}$$

Le processus est le même pour la condensation de deux molécules d'acétone en *diacétone-alcool*, parfaitement réversible ([4]) en raison de la basicité du carbonyle cétonique.

La combinaison des structures cétonique et énolique de l'anion associant indique que, dans l'état mésomère réel, la double liaison est polarisée par la charge négative, les zones de fortes densités électroniques se concentrant autour de l'oxygène et du carbone en α

$$>C{=}C{<}^{O^-} \leftrightarrow >C^-{-}C^+{<}^{O^-} \leftrightarrow >C^-{-}C{\lessdot}^{O}.$$

C'est cette polarisation accentuée de l'ion qui, pour les *phénols* en milieu alcalin, perturbe fortement la symétrie du noyau benzénique et qui permet une réaction analogue, en *ortho* ou en *para*, mais non en *méta*, car les carbones

$$HC\langle^{CH=CH}_{CH=CH}\rangle C{-}O^- \leftrightarrow HC\langle^{CH-C^-H}_{CH=CH}\rangle C{=}O \leftrightarrow HC^-\langle^{CH=CH}_{CH=CH}\rangle C{=}O,$$

correspondants, peu chargés, sont incapables de fixer le cation carbénium qui résulte de la rupture d'une molécule d'hydrate associable.

Ainsi l'expression électrochimique de l'hypothèse formulée dans la Note précédente permet d'approfondir notre conception du mécanisme de la réaction générale de β-hydroxycarbonylation et constitue un point de départ satisfaisant pour de nouvelles recherches chimiques ou physicochimiques, en vue d'une étude quantitative dans le cadre de la *théorie des sels complexes de carbénium* (5).

CHIMIE ORGANIQUE. — *Réductions condensatrices : Structure des produits de réduction de l'aldéhyle crotonique.* Note de M. **Charles Glacet**, présentée par M. Marcel Delépine.

Au cours d'une Note sur les *Réductions condensatrices* (1), nous avons montré que la réduction de l'aldéhyde crotonique, par le magnésium et l'acide acétique, conduisait principalement à deux hydroxytétrahydrofuranes A et B. Nous avions établi provisoirement la structure de ces corps, en étudiant quelques propriétés physicochimiques de leurs produits de déshydratation.

Il nous est apparu par la suite que les formules proposées ne rendaient pas compte de toutes les propriétés de ces alcools tétrahydrofuraniques, et, en cherchant la cause de ces anomalies, nous nous sommes aperçu que la déshydratation de l'une des fractions était accompagnée d'une isomérisation. Il fallait donc chercher à établir par une autre voie la structure de ces produits furaniques.

Ces deux produits A et B, de formule brute $C_8H_{14}O_2$, ne donnent chacun qu'une monoacétine et ne perdent qu'une molécule d'eau par déshydratation; ils possèdent une liaison éthylénique de fréquence Raman 1675 cm^{-1}. Par hydrogénation ménagée sur nickel de Raney ils se transforment en A′ et B′, corps saturés de formule $C_8H_{16}O_2$, qui, eux aussi, ne donnent qu'une monoacétine.

Ces considérations nous permettent de supposer que l'un des atomes d'oxygène forme pont, tandis que le second fait partie d'un groupement hydroxy.

Les acétines de A, B; A′, B′ ayant même vitesse de saponification, ces corps ont donc des structures semblables au voisinage du groupement OH. A, B, A′, B′ réagissent rapidement sur l'hydroxylamine; comme, d'après leur spectre Raman, ces molécules ne comportent pas de fonction C=O, nous pouvons supposer que les deux atomes d'oxygène font partie d'un groupement *hémiacétal*. A et B comporteraient donc un enchaînement —CH(—O—)CHOH (—CH et CHOH reliés par un pont O).

Cette structure est démontrée par le fait que A′ et B′ s'hydrogènent facilement;

(5) P. Rumpf, *Bull. Soc. Chim.*, 5e série, **11**, 1944, pp. 284, 293, 422 et 515; **13**, 1946, article en cours d'impression.

(1) *Comptes rendus*, **208**, 1939, p. 1323.

le produit obtenu est un même γ-glycol $C_8H_{18}O_2$, celui que l'on obtient à partir de B étant un peu moins pur que celui qui provient de l'hydrogénation de A.

Les résultats obtenus dans l'étude des produits de réduction de l'acroléine ([2]) nous permettaient de penser qu'il s'agissait du méthyl-3 heptanediol-1.4; c'est ce que nous avons pu vérifier en obtenant synthétiquement le produit d'oxydation principal de ce glycol.

L'hydrogénation de A′ et B′ conduisant au méthyl-3 heptanediol-1.4, A′ et B′ sont donc des α-propyl β-méthyl α′-hydroxytétrahydrofuranes; A et B, qui conduisent à A′ et B′ par hydrogénation d'une liaison éthylénique située dans une chaîne aliphatique, sont donc deux stéréoisomères de l'α-propényl β-méthyl α′-hydroxytétrahydrofurane.

Pour effectuer la synthèse du méthyl-3 heptanediol-1.4, nous nous sommes arrêté, après de nombreux essais, à la suite de réactions suivantes qui comporte deux synthèses maloniques suivies d'une dégradation et d'une hydrogénation : butyrylacétate d'éthyle → méthylbutyrylacétate d'éthyle → α-méthyl α-butyrylsuccinate d'éthyle → acide β-butyrylbutyrique → β-méthyl γ-propylbutyrolactone. Ce dernier aurait pu être réduit en méthyl-3 heptanediol-1.4, mais il eût été nécessaire de partir d'une quantité importante de butyrylacétate d'éthyle difficile à obtenir ([3]); nous avons préféré oxyder notre glycol par le bichromate de sodium en milieu acétique, opération qui, moyennant quelques précautions, transforme notre glycol en lactone avec un rendement de 75 %. Cette lactone est bien identique à la β-méthyl γ-propylbutyrolactone de synthèse, leurs hydrazides en particulier ont même point de fusion; il s'ensuit que le glycol est bien le méthyl-3 heptanediol-1.4.

Résultats expérimentaux.

Propényl-2 méthyl-3 hydroxy-5 tétrahydrofurane, forme A, $C_8H_{14}O_2$. — $É_{10}$ 102-103°; n_D^{19} 1,4633; d_4^{19} 0,9868; R. M., tr. 39,64; calc. 39,64.

Acétine $C_{10}H_{16}O_3$. — $É_{12}$ 109,5-110°; n_D^{16} 1,4529; d_4^{16} 1,011; R. M., tr. 49,14; calc. 49,01; P. M., tr. 433,6; calc. (Sugden) 424,1 + λ; CH_3CO %, tr. 23,0; calc. 23,37.

Propényl-2 méthyl-3 hydroxy-5 tétrahydrofurane, forme B, $C_8H_{14}O_2$. — $É_{10}$ 108-109°,5; d_4^{17} 0,9975; n_D^{17} 1,4690; R. M., tr. 39,64; calc. 39,64.

Acétine $C_{10}H_{16}O_3$. — $É_{13}$ 115-116°; n_D^{19} 1,4527; d_4^{19} 1,006; R. M., tr. 49,35; calc. 49,01; P. M., tr. 435; calc. 424 + λ; CH_3CO %, tr. 23,05; calc. 23,37.

Propyl-2 méthyl-3 hydroxy-5 tétrahydrofurane, forme A′, $C_8H_{16}O_2$. — $É_{8,8}$ 91-93; n_D^{14} 1,4445; d_4^{14} 0,956; R. M., tr. 40,05; calc. 40, II; P. M., tr. 353, I; calc. 345,3 + λ.

Acétine $C_{10}H_{18}O_3$. — $É_{3,2}$ 97,5-99,5; $n_D^{14,5}$ 1,4371; $d_4^{14,5}$ 0,982; R. M., tr. 49,63; calc. 49,50; P. M., tr. 445,3; calc. 435,8 + λ, CH_3CO %, tr. 23,5; calc. 23,12.

Propyl-2 méthyl-3 hydroxy-5 tétrahydrofurane, forme B′, $C_8H_{16}O_2$. — $É_8$ 95, 5-98°; n_D^{16} 1,4461; d_4^{16} 0,9572; R. M., tr. 40,12; calc. 40,11; P. M., tr. 350,4; calc. 345,3 + λ.

Acétine $C_{10}H_{18}O_3$. — $É_{10,4}$ 102-103,5; $n_D^{16,5}$ 1,4377, $d_4^{16,5}$ 0,9856; R. M., tr. 49,52; calc. 49,50; P. M., tr. 444,2; calc. 435,8 + λ; CH_3CO %, tr. 22,6; calc. 23,1.

([2]) *Ibid.*, 218, 1944, p. 283.

([3]) Wahl, *Annales de Chimie*, 23, 1911, p. 546.

Réaction entre l'hydroxylamine, solution initialement N/10, et l'hydroxytétrahydrofurane, solution initialement N/10, température : 18°,5, demi-réaction atteinte : pour A en 14 minutes, pour B en 5 minutes, pour A′ en 49 minutes, pour B′ en 17 minutes.

Vitesse de saponification des acétines de A, B, A′, B′; en solution hydro-alcoolique initialement N/40 en acétine et soude et à 18°,5 : la demi-réaction est atteinte entre 53 et 57 minutes quelle que soit l'acétine employée.

Méthyl-3 heptanediol-1.4 $C_8H_{18}O_2$. — $É_{10,5}$ 134,5-135-5; $n_D^{16,5}$ 1,4598; $d_4^{16,5}$ 0,949; R. M., tr. 42,15; calc. 42,43. *Diphényluréthane*, F 106°,5.

β-méthyl γ-propylbutyrolactone $C_8H_{14}O_2$. — $É_{15}$ 117-118; n_D^{24} 1,4410; d_4^{24} 0,971; R. M., tr. 38,62; calc. 38,60. *Sel d'argent*, $C_8H_{13}O_3Ag$ Ag %; calc. 40,45; tr. 40,40. *Hydrazide*, $C_8H_{18}O_2N_2$, F 77-77°3 (capillaire).

α-méthyl α-butyrylsuccinate d'éthyle $C_{13}H_{22}O_5$. — $É_{9,8}$ 147,7-148,5; $n_D^{14,5}$ 1,4420; $d_4^{14,5}$ 1,043; R. M., tr. 65,45; calc. 65,55.

Acide 3 butyrylbutyrique $C_8H_{14}O_3$. — $É_{0,67}$ 106,5-107°; $n_D^{15,7}$ 1,4432; $d_4^{15,7}$ 1,0324; R. M., tr. 40,60; calc. 40,69; COOH %; tr. 27,6; calc. 28,45.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Action du brome en présence de bromure d'aluminium, sur le chloracétanilide et l'iodacétanilide.* Note de M. **René Thomassin**, présentée par M. Marcel Delépine.

Le chloracétanilide et l'iodacétanilide ont été préparés par la méthode de M. F. Bodroux [1], action d'un éther monochloracétique ou monoiodacétique sur les dérivés bromo- ou iodomagnésiens de l'aniline. Ayant eu en vue la bromuration de ces anilides, je me les suis procurés, avec un bon rendement, en partant du chloracétate et de l'iodacétate de butyle.

Accessoirement, j'ai constaté que si le dérivé magnésien est en excès, il se forme un corps solide, cristallisant dans l'alcool éthylique en aiguilles blanches, fusible à 114-115° et ne contenant pas d'halogène. Ce composé, obtenu avec un rendement de 76 %, est l'anilide de l'acide phénylaminoacétique

$$C_6H_5-NH-CH_2-CO-NH-C_6H_5$$

dont la formation est expliquée par les équations

$$\begin{array}{ll} C_6H_5-NH-MgX & Cl-CH_2 \\ \quad + & \quad\ \ | \\ C_6H_5-NH-MgX & H_9C_4-O-C=O \end{array} = Mg\begin{matrix}Cl\\X\end{matrix} + Mg\begin{matrix}O-C_4H_9\\X\end{matrix} + \begin{array}{l} C_6H_5-NH-CH_2 \\ \qquad\qquad\ \ | \\ C_6H_5-NH-CO. \end{array}$$

$$C_6H_5-NH-CH_2-C\begin{matrix}NH-C_6H_5\\O\end{matrix} + C_6H_5-NH-MgX = C_6H_5-NH-CH_2-C\begin{matrix}NH-C_6H_5\\NH-C_6H_5\\O-MgX\end{matrix}$$

$$C_6H_5\text{-}NH\text{-}CH_2\text{-}C\begin{matrix}NH-C_6H_5\\NH-C_6H_5\\O-MgX\end{matrix} + \begin{matrix}ClH\\ \\ClH\end{matrix} = Mg\begin{matrix}Cl\\X\end{matrix} + C_6H_5\text{-}NH_2, ClH + C_6H_5\text{-}NH\text{-}CH_2\text{-}CO\text{-}NH\text{-}C_6H_5.$$

[1] *Bull. Soc. Chim.*, 33, 1905, p. 831.

Antérieurement d'autres procédés ont permis à divers savants d'obtenir cet anilide, mais, à ma connaissance, ce mode de préparation n'a pas encore été signalé.

La bromuration de l'acétanilide, en présence de bromure d'aluminium, ayant fourni à M. F. Bodroux un de ses dérivés tribromés, celle des composés halogénés ci-dessus préparés fut effectuée de la même manière, à une température déterminée, mais variable d'une expérience à l'autre. J'ai obtenu dans ces conditions :

a. avec le chloracétanilide, à la température de 8°, un dérivé chlorodibromé cristallisant dans l'alcool éthylique en aiguilles blanches, fusible à 146°,5-147°.

b. avec l'iodacétanilide, à la température de 25°, un composé solide, cristallisant dans l'alcool éthylique en aiguilles blanches, fusible à 160°,5-161°,5. Cette substance qui ne renferme plus d'iode est un dérivé tétrabromé de l'acétanilide.

Dans tous les autres cas il s'est formé des mélanges de dérivés polyhalogénés (chlorodibromés avec le chloracétanilide, tétrabromés avec l'iodacétanilide) qu'il ne m'a pas été possible de séparer.

Pour établir la composition de ces deux composés halogénés, je les ai traités pendant deux heures par des solutions alcooliques bouillantes de potasse. J'ai ainsi libéré les anilines halogénées correspondantes, qui cristallisent en aiguilles blanches dans une solution étendue d'alcool éthylique :

a. celle provenant du chlorodibromacétanilide fond à 83°,5-84°,5. C'est la dibromo-2.6-aniline;

b. celle provenant du tétrabromacétanilide fond à 80°-81°. C'est la tribromo-2.4.5-aniline.

Il s'ensuit que les composés définis obtenus en bromant, en présence de bromure d'aluminium, le chloracétanilide et l'iodacétanilide ont pour formules de constitution

$$\underset{(2.6)}{C_6H_3Br_2}\text{---}NH\text{---}CO\text{---}\underset{(1)}{CH_2Cl} \quad \text{et} \quad \underset{(2.4.5)}{C_6H_2Br_3}\text{---}NH\text{---}CO\text{---}\underset{(1)}{CH_2Br}.$$

Le brome en excès agissant en présence de bromure d'aluminium sur l'iodacétanilide a donc eu pour effet de remplacer, en même temps que trois hydrogènes du noyau, l'atome d'iode du radical acylé. Cet iode mis en liberté semble exalter l'action substituante puisque, dans les expériences effectuées, il m'a toujours été donné d'obtenir des dérivés tétrabromés, alors que normalement l'halogène ne déplace que deux hydrogènes du noyau.

Ces résultats m'ont engagé à faire agir sur l'acétanilide un excès de brome tenant en dissolution ou en suspension soit de l'iode, soit un mélange d'iode et de bromure d'aluminium. Dans le premier cas seulement (brome contenant 1 % d'iode) j'ai obtenu un dérivé défini de l'acétanilide, le dibromo-2.4-acétanilide. Ce composé s'obtenant aisément par action directe du brome, l'iode ne favorise donc pas une bromuration plus avancée.

GÉOLOGIE. — *Sur l'existence d'un niveau maestrichtien au Sénégal.* Note [1] de M. **Fernand Tessier.**

La région de Popenguine a été maintes fois citée dans la littérature géologique du Sénégal ; elle offre en effet, sur ses falaises côtières, des affleurements généralement très rares dans cette colonie. St. Meunier [2] y signale des couches à Turritelles et Bivalves; J. Chautard [3] un Oursin, *Linthia Delanouei* de Loriol. Plus récemment, C. Arambourg [4] détermine *Dyrosaurus* sp. des restes recueillis par F. Jacquet. Ce sont là les seuls fossiles cités dans des couches attribuées à l'Éocène inférieur. Cependant Chautard [5] parlait en 1906 de l'existence probable de Crétacé Supérieur à Popenguine, mais il ne revient plus sur cette idée dans la Notice de sa carte.

La présente Note a pour objet de signaler dans un niveau gréseux près de la base de la série observable : *Roudaireia auressensis* Coquand, *Cardita cf. Beaumonti* d'Archiac, associées à d'autres dont *Cucullœa* cf. *Schweinfurthi* Zittel, *Plicatula aff. instabilis* Stoliczka, *Restellaria sp.*, *Nautilus sp.*, etc. La détermination spécifique de tous les échantillons permettra de préciser les affinités de cette faune, que je considère comme maestrichtienne par comparaison avec l'Égypte et le Soudan Français en particulier. Le détail des faciès de ce niveau : grès fins, sables, argiles versicolores, lumachelles à coquilles brisées, indiquant un dépôt de rivage, peut expliquer la rareté en Ammonites et leur non-découverte; d'autre part le gisement a une extension limitée à quelques dizaines de mètres par deux failles qui ont remonté le compartiment étudié, interdisant toute investigation latérale.

Je propose la coupe suivante de cette région, hachée de failles et riche en intrusions de tufs volcaniques, ce qui rend l'interprétation difficile :

1° Sables ferrugineux fins, passées d'argile grise et violacée; grès calcareux à *Roudaireia auressensis* (15^m repérés par puits).

2° Calcaires marneux en bancs séparés par des marnes. Faune : *Lucina* sp., *Chenopus* sp., débris de Tortue marine, *Dyrosaurus*. Puissance 40^m environ.

3° Calcaires grossiers, coquilliers, à base conglomératique (discordance ?). Faune : *Linthia Delanouei.* Turritelles nombreuses parmi lesquelles on reconnaît les groupes de *T hybrida* et *T. imbricataria.* Lamellibranches peu nombreux. Puissance 10^m.

4° Discordance.

5° Argiles gypseuses du Cap de Naze, 20^m.

---

(1) Séance du 4 février 1946.

(2) *Comptes rendus*, 126, 1898, pp. 666-668.

(3) Notice explicative de la *Carte géologique de la presqu'île du Cap Vert*, Paris, Barrère, 1906.

(4) *Vertébrés fossiles du bassin du Niger* (*Bull. Dir. Min. A. O. F.*, n° 7, Dakar, 1943, p. 63).

(5) *Contributions nouvelles à la géologie du Sénégal* (*Bull. S. G. F.*, 4e série, 6, 21 mai 1906, p. 260).

6° Grès argileux roux et sables blancs, 35^m.
7° Argiles grises, 10^m.
8° Carapace ferrugineuse.

Le niveau 2 n'étant pas encore daté, la délimitation entre le Crétacé et l'Éocène demeure pendante. Les niveaux 5 et suivants sont très probablement post-Lutétiens.

D'autres données nous font voir que l'Éocène de Popenguine se complète supérieurement vers l'Est. Les sondages de Thiès ont relevé de haut en bas : 10^m de calcaire, 130^m de marnes blanches affleurant à l'Ouest dans la falaise dite de Thiès et réputées yprésiennes, 100^m de calcaire, enfin des sables aquifères suivis jusqu'à l'arrêt des travaux, sur une centaine de mètres. Suivant un axe Thiès-Bandia on a un pendage vers Thiès d'environ 4 à 5 millièmes qui ramène en surface le sommet des calcaires inférieurs du sondage (Calcaires de Bandia). Dans le prolongement de cet axe, la série calcaire de Popenguine représente, à mon avis, la base de ces mêmes calcaires et le niveau 1 est le sommet des sables aquifères. J'ai découvert par ailleurs la partie médiane des calcaires dans la vallée de la Somone (faciès assez voisin du n° 3 de Popenguine, mais faune nouvelle : grands Gastropodes, *Pseudolica* sp., dents de *Myliobathis*, restes de Vertébrés en cours d'étude etc.).

Conclusions. — Les 100^m de calcaires du sondage de Thiès renferment la base de l'Éocène sénégalais et comprennent les ensembles suivants : de haut en bas Calcaires de Bandia, Calcaires de la Somone, Calcaires grossiers de Popenguine, Calcaires marneux de Popenguine.

Les sables des sondages de Thiès sont vraisemblablement maestrichtiens à leur sommet.

La série marneuse de Dakar est remarquablement différente, bien qu'attribuée classiquement au Sénonien supérieur, des sables maestrichtiens de Popenguine et de Thiès.

GÉOLOGIE. — *Application du compteur de Geiger-Müller à la stratigraphie, dans le bassin houiller du Nord de la France.* Note [1] de M. **Jacques Chalard**, présentée par M. Charles Jacob.

En étudiant la radioactivité des sources thermales du Nord de la France, Mlle G. Muchemblé [2] fut amenée à en rechercher l'origine dans les roches de la région. Une série d'analyses effectuées méthodiquement, suivant un programme donné par M. P. Pruvost, avait montré que les propriétés radioactives étaient étroitement localisées aux horizons schisteux à fossiles marins du bassin houiller.

---

(1) Séance du 18 février 1946.
(2) *Comptes rendus*, 216, 1943, pp. 270-271.

Si les valeurs les plus élevées avaient été observées dans les roches de l'Assise de Bruille de la base du Namurien, les niveaux marins westphaliens de Poissonnière et de Rimbert montraient également une teneur bien supérieure à celle des roches environnantes.

Or on doit à Charles Barrois d'avoir montré que ces horizons marins, très minces et à très grande extension géographique, constituaient des repères stratigraphiques intéressants, particulièrement appréciés des ingénieurs des mines qui les font rechercher systématiquement dans leurs travaux; mais ces niveaux fossilifères de faible épaisseur sont souvent difficiles à déceler au milieu des formations épaisses et monotones du terrain houiller. Il a donc semblé intéressant de chercher à les repérer par leurs propriétés radioactives.

Depuis quelques mois, en certains points du bassin houiller, on a utilisé un dispositif à compteur de Geiger-Müller et obtenu de bons résultats. Les indications de l'appareil accusent une augmentation nette de la radioactivité lorsque la galerie traverse un niveau marin : 50 à 60 unités arbitraires [3] pour un terrain d'origine continentale, 75 à 95 au passage des niveaux de Rimbert ou de Poissonnière.

Ces résultats sont susceptibles d'être faussés par la présence, en certains points des galeries, de dispositifs de soutènement comportant un revêtement plus ou moins épais de roches houillères de diverses provenances. Dans ce cas les mesures ont dû être effectuées pour chaque point en plaçant l'appareil au contact de la roche préalablement débarrassée de son revêtement et grossièrement aplanie sur une surface assez large de façon à opérer toujours dans les mêmes conditions. Les résultats sont alors tout à fait satisfaisants et dépendent plus étroitement encore de la nature de la roche : charbon 50 à 60; schistes à plantes ou à faune limnique 80 à 90; schistes marins 95 à 115.

Cette méthode semble appelée à rendre de grands services en stratigraphie houillère, surtout lorsqu'on pourra disposer d'appareils plus sensibles et plus perfectionnés que ceux utilisés, appareils qui élimineraient sans doute en grande partie l'influence perturbatrice du revêtement des galeries.

En dehors de ces conditions très spéciales d'emploi pour la recherche des niveaux marins dans le bassin houiller du Nord, la méthode pourra sans doute être généralisée avec succès sur le terrain, non seulement pour la prospection des minerais radioactifs; mais encore dans certaines études de stratigraphie. On rencontre en effet dans la nature, comme l'a montré Mlle Muchemblé, à côté de formations calcaires très peu radioactives,

---

(3) Ces unités dépendent de l'appareil employé et des conditions d'emploi. Pour les teneurs de ces niveaux en éléments radioactifs, voir la Note citée de Mlle Muchemblé.

de nombreuses roches dont la radioactivité est égale (granites) et même très supérieure [schistes ampéliteux de Spa à *Dictyonema*, schistes gothlandiens à graptolites (²), schistes alunifères de Sandby (⁴)] à la teneur en éléments radioactifs de nos modestes niveaux marins westphaliens. On conçoit donc que de tels appareils puissent rendre service pour certains levés cartographiques à grande échelle.

SÉISMOLOGIE. — *Le grand tremblement de terre de Chalcidique du 26 septembre* 1932. Note de MM. **Georges Georgalas** et **Angele Galanopoulos**, présentée par M. Albert Michel-Lévy.

Le 26 septembre 1932, à $21^h 21^m 22^s$, la péninsule balkanique, et en particulier son centre, subissait un tremblement de terre particulièrement violent, qui occasionnait des dommages extrêmement étendus dans de nombreuses localités, situées dans la partie orientale de la Chalcidique et, en particulier, autour du golfe d'Iérissos de même que sur les bords du lac Volvi.

Grâce à des études entreprises sur place par Georgalas, complétées par des renseignements recueillis sur son initiative dans 479 localités de la Grèce et des pays voisins (Yougoslavie et Bulgarie), il a été possible de réunir, pour la première fois en Grèce, un matériel macroséismique relativement abondant et assez détaillé.

De l'étude analytique de ce matériel, ce sont seulement les points essentiels, de même que quelques conclusions importantes, qu'on trouvera dans la présente Communication.

La secousse séismique principale avait une étendue macroséismique assez considérable. Son axe NO-SE dépassait 760^{km}, s'étendant de Petrovac (en Yougoslavie) à Karystos dans l'extrémité sud de l'île d'Eubée, tandis que l'axe NE-SO, de la même longueur, allait de Constantinople à Jannina (Épire). L'activité macroséismique fut enregistrée jusqu'à la Paz de Bolivie ($11\,300^{km}$).

De nombreux métaséismes ont suivi, dont les plus importants étaient ceux des 28 et 29 septembre, celui du 9 octobre, de même que celui du 11 mai 1933 ($21^h 10^m$). Dès le mois d'août 1933, les secteurs ébranlés de la Chalcidique semblèrent avoir retrouvé déjà définitivement un équilibre provisoire.

Le séisme du 26 septembre 1932 détermina aussi l'achèvement prématuré de certaines tensions élastiques à peine ébauchées, qui dominaient certaines dislocations labiles, situées non loin de la région épicentrale. C'est ainsi

(⁴) A. H. Westergard, *Borrningar genom Skanes alunskiffer* (*Sver. geol. Unders.*, **38**, 1944, C. 459. Stockholm).

que les métaséismes qui ont suivi quelque temps après, en particulier les plus violents d'entre eux, à savoir ceux des 28 et 29 septembre et celui du 9 octobre 1932, partant du même foyer, ont réussi très facilement à déclencher, d'une manière prématurée, les tensions élastiques précédemment citées qui étaient devenues déjà mûres. Les énergies cinétiques supplémentaires, produites par ces phénomènes, ont eu pour résultat d'intensifier, de place en place, les effets des métaséismes, ainsi que l'extension vers l'Ouest de la zone de dommages primitivement esquissée par la secousse principale. Le résultat en a été que quelques métaséismes, dont celui du 29 septembre, furent, dans certaines localités, comme par exemple à Salonique et à Langadha, plus sensibles encore que le séisme principal du 26 septembre.

De plus, les régions secondaires des dommages ont amené certains savants (¹) à considérer les dislocations, qui se sont comportées en tant que résonnateurs, comme des foyers séismiques primaires indépendants, et ceci, à cause de leur caractère pseudo-épicentral. Pour cette même raison, ces savants ont soutenu que, depuis le 26 septembre jusqu'au 2 octobre 1932, il y a eu deux (et même, selon Maravelakis), trois foyers séismiques en activité dans la Chalcidique. Cependant, l'étude du tableau de distribution de l'ensemble des effets séismiques montre clairement, selon nous, que tous les séismes de la Chalcidique, depuis le 26 septembre 1932 jusqu'au 11 mai 1933, dérivaient d'un seul et même foyer séismique, qui, d'après les déterminations de la section géodynamique de l'Observatoire d'Athènes, est situé dans la partie Sud-Est du golfe d'Iérissos $\varphi = 40°,5\,\mathrm{N}$, $\lambda = 24°$ Est. Mais, étant donné que les données macroséismiques ne concordent pas avec cette détermination épicentrale, nous estimons que le foyer en question doit être situé dans la partie Nord-Ouest du golfe d'Iérissos et, notamment, au point de croisement de la ligne de dislocation Stratoniki-Stratoni, allant de l'Ouest à l'Est, et de la dislocation littorale allant du Nord au Sud, le long de la côte occidentale du golfe d'Iérissos, c'est-à-dire de deux lignes tectoniques le long desquelles se sont produits les effets séismiques les plus violents.

EMBRYOLOGIE VÉGÉTALE. — *Développement de l'albumen chez le* Loasa lateritia *Gill.* Note de M. **Pierre Crété**, présentée par M. René Souèges.

Nous devons à Kratzer (¹) ce que l'on sait de précis sur l'embryologie des Loasacées. Son étude porte sur neuf espèces réparties dans les cinq genres

(¹) Voir N. Criticos, *Sur la séismicité de Macédoine* (*Gerlands Beitr.*, 2, *Geophysik*, 40, 1933); N. Maravelakis, *Les caractères géologiques et macroséismiques des séismes de Chalcidique* (septembre 1932) (*Praktica de l'Académie d'Athènes*, 8, 1933).

(¹) *Flora*, 110, 1918, p. 275.

suivants : *Loasa*, *Cajophora*, *Blumenbachia*, *Mentzelia* et *Gronovia*. Il décrit la formation de l'ovule, du sac embryonnaire et signale l'existence générale d'haustoriums, déjà différenciés avant la fécondation. Il est malheureusement impossible de déterminer, d'après ses descriptions, l'origine précise des diverses régions que l'on peut délimiter dans l'albumen, à certains stades. Je me suis attaché à combler cette lacune en m'adressant à des graines de *Loasa lateritia* Gill.

Le sac embryonnaire du *L. lateritia* se compose d'une chambre micropylaire et d'une chambre chalazienne, séparées par un étranglement. Seule, la portion chalazienne, plus étroite, est bordée par un tapis sur tout son pourtour, sauf au niveau d'un cæcum court, étroit, dirigé vers le raphé, et qui renferme les trois antipodes. Fécondé, le noyau secondaire vient occuper la chambre chalazienne, où il prend un aspect amiboïde. L'un des produits de sa cinèse (*fig.* 1), se loge dans la chambre micropylaire, où il donnera directement un

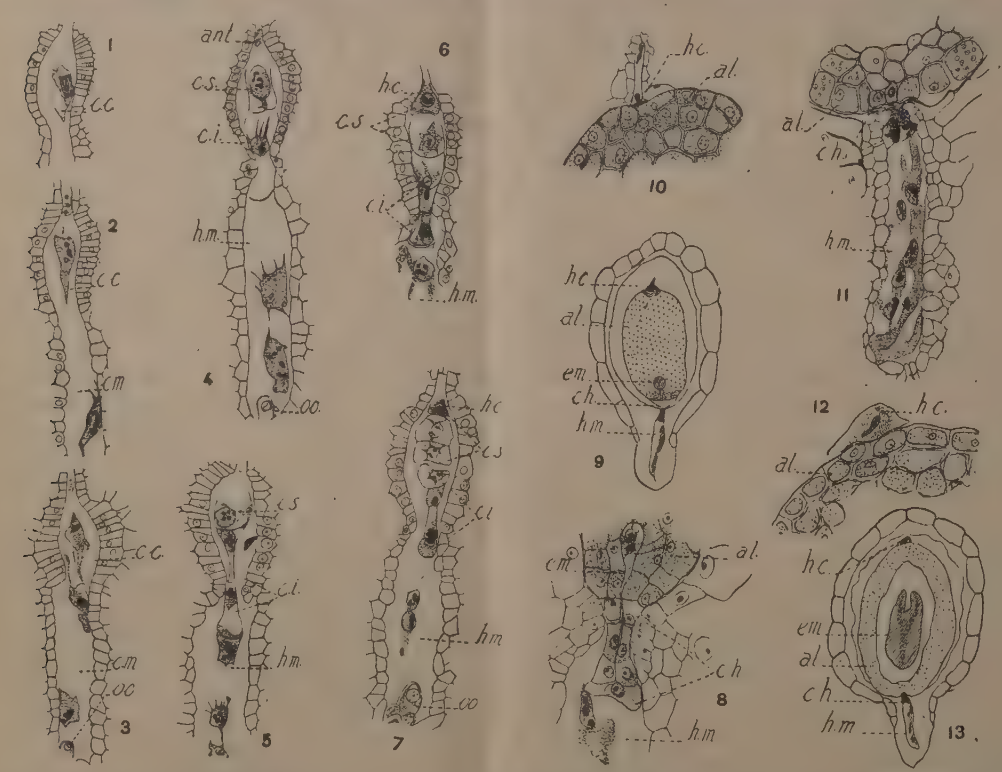


Fig. 1 à 13. — *Loasa lateritia* Gill. — Développement de l'albumen. De 1 à 7, premières segmentations; en 8, formations haustoriales en bordure de la chambre micropylaire; en 9, coupe longitudinale de la jeune graine; en 10, haustorium chalazien de cette graine, fortement grossi; en 11 et 12, régions haustoriales, chalazienne et micropylaire, de la graine adulte figurée en 13; *cc* et *cm*, chambre chalazienne et chambre micropylaire; *cs* et *ci*, étage supérieur et étage inférieur correspondant à chacune des deux premières cellules formées dans la chambre chalazienne; *hc*, haustorium chalazien; *hm*, haustorium micropylaire; *ch*, tissu haustorial dérivé de *ci*; *oo*, oospore; *em*, embryon; *al*, albumen proprement dit. G. = 250 pour les figures 1 à 7, 10 à 12; 290, pour la figure 8; 40, pour les figures 9 et 13.

haustorium; l'autre reste d'abord sur place (*fig.* 2), puis émigre dans l'étranglement du sac où il subit une division (*fig.* 3), suivie d'un cloisonnement (*fig.* 4). Il se forme ainsi

une cellule supérieure, *cs*, et une cellule inférieure, *ci*, et les deux chambres apparaissent nettement séparées par une paroi bombée, dont la convexité est dirigée vers le micropyle. La cellule *ci* fournit deux éléments superposés (*fig.* 5) dans chacun desquels apparaît ensuite une cloison transversale (*fig.* 6 et 7); la cellule apicale de cette tétrade linéaire contribuera à la construction de l'albumen proprement dit; les trois autres éléments donneront un tissu offrant les caractères d'un haustorium. La cellule *cs* se divise en une cellule chalazienne qui fournira un haustorium et un élément sous-jacent, d'où proviendra la majeure partie de l'albumen proprement dit.

L'albumen proprement dit s'accroît d'abord en longueur par une série de divisions transversales, puis, lorsqu'il compte une dizaine de cellules, il se cloisonne surtout longitudinalement et prend une forme arrondie (*fig.* 9). Digéré progressivement en son centre par l'embryon, parvenu au stade cotylédonaire, il est finalement réduit à quelques assises cellulaires dont la plus externe est recouverte d'une épaisse cuticule (*fig.* 13).

Un haustorium se différencie très tôt dans la chambre micropylaire; il provient du noyau qui s'isole dans cette région au début de la formation de l'albumen (*fig.* 2). Il comporte une huitaine de volumineux noyaux, d'aspect amiboïde d'abord (*fig.* 2 à 5), de forme ovale ensuite (*fig.* 7).

Des trois éléments inférieurs issus de *ci*, l'intermédiaire se cloisonne une fois transversalement encore et les quatre cellules maintenant apparentes offrent tous les caractères des formations haustoriales. En définitive, chacun des étages comprend seulement deux cellules à contenu épais (*fig.* 8). Dans la graine adulte, les deux étages inférieurs sont séparés de l'albumen proprement dit par un étranglement qui fait disparaître l'étage intermédiaire. L'étage supérieur reste inclus dans l'albumen proprement dit dont il se distingue cependant par son contenu et la taille réduite de ses éléments. La cuticule qui entoure l'albumen proprement dit se poursuit à son niveau, doublée par un tissu formé des cellules écrasées de l'enveloppe séminale (*fig.* 11).

L'haustorium chalazien n'est jamais constitué que d'une seule cellule, qui s'enfonce dans le cæcum chalazien (*fig.* 6, 7 et 10), s'étale lors de la destruction des tissus tégumentaires qui le bordent; puis, son noyau disparaît, tandis qu'une cuticule épaisse le sépare de l'albumen proprement dit (*fig.* 12).

Il est assez rare de pouvoir suivre avec cette précision l'origine, non seulement des haustoriums, mais aussi des formations à caractère haustorial. La différenciation n'est pas, comme chez la plupart des Labiatiflores ([2]), terminée lors des tout premiers cloisonnements; l'haustorium micropylaire commence à se constituer à la première génération, l'haustorium chalazien à la troisième et l'albumen proprement dit, partie à la troisième, partie à la quatrième. Ces observations, avec leurs particularités caractéristiques, pourront aider à résoudre les questions qui se posent au sujet de la place, encore fort discutée, des Loasacées dans la classification.

TÉRATOLOGIE VÉGÉTALE. — *Nouvel aspect des conséquences anatomiques d'une piqûre.* Note de Mlle **Madeleine Fourcroy**, présentée par M. René Souèges.

Les conséquences anatomiques des traumatismes ont longuement été étudiées. J'ai moi-même apporté une large contribution à leur connaissance en m'adres-

([2]) P. Crété, *Thèse Doct. ès Sc.* Paris, 1942.

sant à la racine, organe qui se révèle le plus riche en possibilités [1]. C'est que, en effet, la présence des phases vasculaires primitives et leur histoire, aux niveaux lésés, mais surtout dans les parties d'organe régénérées après la blessure, permettent des observations que ne peuvent plus fournir les organes aériens soumis à l'accélération basifuge. Je rappellerai brièvement que les facteurs intervenant fondamentalement sont la nature, la direction, la profon-



Fig. 1. Fig. 2.

deur de la lésion et l'âge de la plantule touchée. Il va sans dire que la région atteinte conditionne les effets : très limités dans les tissus adultes, ils sont d'autant plus variés dans leur nature et leur intensité que l'on blesse une région proche du point végétatif.

Voulant aujourd'hui décrire un aspect nouveau des conséquences d'une piqûre, aux niveaux mêmes où elle s'est produite, je n'évoquerai aucune des *influences à distance* des traumatismes. Il suffit de résumer, pour les sections effectivement atteintes, les résultats acquis : destruction directe de certains éléments, résorptions provoquées de certains autres, accélération évolutive du développement de l'appareil conducteur, amenant, comme en suppléance des

(1) *Ann. des Sc. nat. Bot.*, 20, 1938, pp. 1 à 240.

éléments hors d'usage, la différenciation hâtive des vaisseaux et des tubes criblés plus récents.

La racine de *Daucus Carota* (*fig.* 1) que j'ai examinée s'est parfaitement développée, bien que son étude anatomique révèle les traces d'une piqûre située à $0^{cm},5$ du collet. Cette piqûre, profonde, atteignant le voisinage du protoxylème de la racine *très jeune*, est responsable de la bifurcation du pivot et sans doute de l'enroulement si étonnamment régulier des deux branches. La figure 2 révèle, en effet, qu'elle a réussi à provoquer un *véritable clivage de la bande diamétrale vasculaire* formée normalement par les deux phases alternes centripètes de la racine de la Carotte (racine binaire sans moelle). La lecture d'une telle coupe était extrêmement difficile, car, aux conséquences du traumatisme, s'ajoute l'étirement qui accompagne l'accroissement en diamètre de l'organe. Quoi qu'il en soit, dans la stèle à peine déformée de ce pivot (le secteur lésé est étroit), on trouve une double bande diamétrale vasculaire Va^1 et Va^2 dont les éléments sont reliés par de longues cellules à parois épaisses dans lesquelles des relais de lignine attestent qu'un étirement a disjoint, par une translation, *des éléments primitivement associés*. Dans l'une comme dans l'autre, les vaisseaux étroits des pôles se sont constitués et sont séparés du groupe médian par une seule cellule parenchymateuse.

Que le pôle vasculaire superposé Vs^1 soit resté normal derrière le protoxylème Va^2, alors que le traumatisme a causé une extrême dispersion derrière Va^1; que, en conséquence, le xylème secondaire VsII puisse se trouver plus près de Va^1 que le xylème primaire VsI visiblement glissé sur sa droite et sur sa gauche; que, de ce fait, le large rayon parenchymateux du plan cotylédonaire, si typique des racines binaires, ne subsiste que sur la droite, tout cela rentre sans intérêt nouveau dans le cadre des conséquences anatomiques prévisibles. Ce qui méritait d'être signalé, c'est la constitution d'une racine *potentiellement bistélique par ses protoxylèmes et restée monostélique par ses métaxylèmes*. Et ceci, sur près de 1^{cm} de longueur. Or, le développement du pivot consiste surtout dans son accroissement en épaisseur; je ne pense pas qu'une élongation ultérieure à la piqûre ait été assez considérable pour fausser cette appréciation.

Au moment de la récolte, il y a $1^{cm},8$ entre le niveau de la lésion, celui de la figure, et la bifurcation morphologique apparente qu'elle conditionne. A la remarquable symétrie bilatérale que le clivage longitudinal du protoxylème confère à la stèle correspond une symétrie remarquable des deux branches du pivot.

BIOLOGIE AGRICOLE. — *Courbes caractéristiques du développement du grain de Blé au point de vue physique*. Note de MM. **Henri Geslin** et **Pierre Jonard**, présentée par M. Maurice Javillier.

Nous avons montré [1] que la courbe de variation de la quantité d'eau, en

[1] *Comptes rendus*, **222**, 1946, p. 410.

valeur absolue, contenue dans le grain de Blé, au cours de son développement, présentait un palier, correspondant à une phase singulière de l'évolution du grain. Il débute sensiblement au moment où le grain a pris sa forme définitive, trois semaines à un mois après l'épiaison; il se termine quand le stade *pâteux* est atteint, c'est-à-dire quelques jours à peine avant qu'on ne note la maturité physiologique.

Les observations et les mesures biométriques effectuées sur diverses variétés semées à date normale, au cours d'années différentes, permettent de définir, du point de vue physique, les caractéristiques de cette phase particulière. Les résultats globaux sont donnés dans le tableau ci-après :

Caractéristiques du palier de la courbe de variation (¹)
de la quantité d'eau contenue en valeur absolue dans 1000 *grains.*

Variété utilisée et année.	Début du palier		Fin du palier		Durée en jours.	Température		Radiation globale R	Facteur d'action K
	date.	H p. 100.	date.	H p. 100.		Σt^o_m.	t^o_m.	ΣR.	ΣK.
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
1945									
Renfort....	23/6	62,0	5/7	48,0	11,6	181°,8	15°,65	5363	4029
1944 (²)									
Vilmorin 27.	30/6	61,8	11/7	48,0	10,8	184,8	17,05	5219	4099
1942									
Super-hâtif.	30/6	60,0	10/7	48,5	9,7	179,4	18,5	5169	4232
Vilmorin 29.	4/7	59,7	15/7	48,0	11,0	176,3	16,05	5510	4091
Vilmorin 27.	4/7	60,0	15/7	47,7	11,0	176,3	16,05	5510	4091
1941									
Vilmorin 29.	11/7	51,0	22/7	42,0	11,1	184,3	16,6	5434	4205
Vilmorin 27.	11/7	51,5	22/7	41,0	11,1	184,3	16,6	5434	4205

La date à laquelle débute ou se termine le palier (col. 2 et 4) est variable suivant les années, la variété et la date de semis, étant fonction des conditions climatiques particulières à chaque année. Par contre, si l'on excepte les résultats de l'année 1941, exceptionnelle à maints égards, on constate que l'humidité atteinte par le grain, exprimée en pour cent du poids frais (col. 3 et 5) et correspondant aux deux extrémités du palier, se maintient constante, quelle que soit la variété ou l'année (³). Les différences observées col. 3, de 1942 à 1945, ne peuvent en effet être considérées comme significatives, l'humidité du grain à cette époque s'abaissant de 1,5 à 2 % dans l'espace de 24 heures. La

(²) Les données expérimentales de base utilisées ont été empruntées à la Note de J. Delga et P. André, *C. R. Acad. Agri.*, 30, 1944, p. 454.

(³) Dès les premières déterminations de l'humidité du grain, effectuées quelques jours après la floraison, on notait déjà des chiffres d'humidité très inférieurs en 1941 (62 à 65 %) comparativement à ceux observés les autres années (75 à 80 %).

durée du phénomène (col. 6) est variable, de l'ordre de 10 à 12 jours, elle est étroitement liée à l'action des facteurs du milieu. Qu'il s'agisse de la température, de la radiation globale ou du facteur d'action K ([1]), la somme des valeurs moyennes journalières accumulées de chacun de ces éléments, pris séparément (col. 7, 9 ou 10) et correspondant au palier, est constante à $\pm 2,5$ % près par rapport à la moyenne. Ceci implique une relation de proportionnalité : la durée du phénomène est en effet inversement proportionnelle à l'intensité moyenne journalière de chacun des facteurs considérés. Aucune expérience particulière ne permet cependant actuellement de préciser, parmi les trois facteurs étudiés, celui auquel revient le rôle dominant, vu l'interdépendance de la température et de la radiation globale.

En résumé, nos essais ont permis de mettre en évidence l'existence d'une période singulière dans l'évolution du grain de Blé. Nous avons émis l'hypothèse dans notre précédente Note que cette période devait correspondre à la phase de condensation active des matières protéiques ou amylacées et constituait une période critique nettement définie. Dès maintenant, l'existence de cette phase apparaît comme présentant un caractère très général. Nous avions pu en préciser certaines constantes physiques caractéristiques qui semblent indépendantes de l'année ou de la variété, tout au moins dans la limite où les conditions physiques externes ne risquent pas de provoquer un brusque blocage des matériaux constitutifs du grain, se traduisant notamment par l'échaudage.

CHIMIE PHYSIQUE BIOLOGIQUE. — *Action comparée des cristalloïdes,* in vitro *et* in vivo, *sur l'hydrosolubilité des liquides organiques volatils.* Note ([1]) de M. **Alexandre Lindenberg**, présentée par M. Maurice Javillier.

Le coefficient de partage huile-eau de l'isopropanol augmente sous l'effet de la dissolution dans la phase aqueuse de cristalloïdes polaires non volatils ([2]) :

Cristalloïde dissous dans la phase aqueuse.	Concentration en mol-g/litre.	Coefficient de partage huile-eau de l'isopropanol.
Aucun	0	0,07
Chlorure de sodium	0,5	0,09
» »	1,0	0,11
» »	2,0	0,15
Glucose	1,0	0,105
Urée	1,0	0,09

L'augmentation du coefficient de partage en faveur de la phase huileuse

([1]) Séance du 18 février 1946.

([2]) A. Lindenberg et Winternitz, *C. R. Soc. Biol.*, 131, 1939, p. 1085.

dénote de toute évidence une augmentation correspondante de la fugacité (pression partielle de vapeur en solution diluée) ou une diminution correspondante de la solubilité de l'alcool dans la phase aqueuse chargée de cristalloïdes. Tirons les conclusions que comportent ces résultats, que nous comparerons avec ceux des expériences effectuées sur des animaux aquatiques.

1° Des concentrations équimoléculaires de chlorure de sodium et de glucose abaissent l'hydrosolubilité de l'isopropanol dans une mesure quasi identique. Ce résultat, s'inscrivant contre l'idée d'une action spécifiquement ionique, concorde avec la manière de voir exposée récemment ([3]).

Tandis que les molécules polaires non volatiles restent cantonnées dans la phase aqueuse de leur solution, les molécules volatiles ont la faculté d'évoluer vers d'autres phases, de sorte que, en s'emparant d'une certaine proportion des liaisons de solubilité de l'eau, le cristalloïde non volatil diminue, dans la même proportion, la capacité solvante de l'eau et par conséquent le coefficient de solubilité de la substance volatile.

Deux facteurs antagonistes vont intervenir pour chaque espèce moléculaire, volatile ou non : le nombre l de groupes hydrophiles de la molécule et la masse (critère du volume) moléculaire M, ce dernier facteur étant défavorable à la dissolution.

Le coefficient de solubilité d'une molécule volatile dans un milieu polaire sera d'autant plus faible que son quotient M/l est plus grand, et *vice versa*, l'abaissement de ce coefficient produit par une molécule polaire fixe sera d'autant plus important que son quotient l/M est plus grand. Or, les valeurs des quotients l/M du ClNa ($2/58,5 = 1/29,25$) et du glucose ($6/180 = 1/30$) sont très voisines.

2° La similitude d'action des concentrations équimoléculaires de ClNa et de glucose se retrouve encore dans le phénomène de déshydratation d'un animal aquatique à indépendance osmotique relative séjournant dans des solutions hypertoniques de ces cristalloïdes ([4]).

3° A la même concentration moléculaire, l'effet de l'urée est deux fois plus faible que celui des deux cristalloïdes précédents, phénomène que nous attribuons au fait que *seul le groupe oxygéné* —CO— *est susceptible d'utiliser à ses fins les liaisons de solubilité de l'eau affectées aux* OH *alcooliques*. On a alors, pour l'urée, un quotient l/M égal à $1/60$, donc deux fois plus petit que celui du glucose ou du chlorure de sodium.

4° Avec chaque molécule de ClNa dissous dans la phase aqueuse, le coefficient de partage huile-eau de l'isopropanol augmente régulièrement (de 0,04), indiquant la *non-intervention, dans le phénomène étudié, du degré de dissociation de l'électrolyte*.

([3]) A. Lindenberg, *Comptes rendus*, 222, 1946, p. 202.
([4]) G. Fontès, Mlle J. Brunner et A. Lindenberg, *C. R. Soc. Biol.*, 121, 1936, pp. 459 et 978.

5° Soient A et $1/A$, B et $1/B$ les concentrations d'équilibre (solubilités) et les fugacités de l'isopranol dans l'eau pure et dans l'eau salée, n le nombre de mol-g de ClNa dans un litre de solution aqueuse, M le poids moléculaire de l'isopropanol (60) et α la proportion des liaisons de solubilité de l'eau affectées par le sel. Les données du tableau précédent fournissent les relations

$$\frac{\frac{1}{B}-\frac{1}{A}}{\frac{1}{A}}=\frac{A-B}{B}=\frac{(0,07+0,04n)-0,07}{0,07}=\frac{n}{1,75}=\frac{\alpha M}{1-\alpha M}.$$

L'augmentation de fugacité de l'alcool dans la phase aqueuse salée, par rapport à la fugacité dans l'eau pure, est proportionnelle à la concentration moléculaire du sel.

Envisageant la diminution relative de solubilité, on aura

$$\frac{A-B}{A}=\frac{\frac{100}{7}-\frac{100}{7+4n}}{\frac{100}{7}}=\frac{n}{1,75+n}=\alpha M.$$

6° La concentration moléculaire de l'eau de l'organisme d'un animal d'eau douce à indépendance osmotique relative est environ de 0,165 en ClNa. L'abaissement relatif de solubilité d'un monoalcool produit par cette concentration physiologique est égal à 0,0028 M ([2]). Or, dans l'eau *extérieure*, l'abaissement de solubilité produit par la même concentration moléculaire est seulement de 0,0014 M, soit *deux fois plus petit que dans l'eau de l'organisme*. Immédiatement on songe aux colloïdes hydrophiles présents dans le milieu interne pour expliquer cette divergence. Mais celle-ci est revélatrice d'un *fait physicochimique fondamental assurant aux sels dissous un effet double de celui manifesté dans l'eau extérieure*.

CHIMIE BIOLOGIQUE. — *Sur la formation de pénicilline par le* Penicillium notatum. Note de MM. **Pierre Heitzmann** et **Norbert Grelet**, présentée par M. Gabriel Bertrand.

La production de pénicilline que l'on observe avec des cultures de pénicilline d'un certain âge présente beaucoup d'analogies avec celle des toxines microbiennes. Le mécanisme de cette sécrétion paraît très complexe.

Les auteurs qui se sont occupés de ce problème ([1]) ont d'abord cherché à

([1]) E. P. Abraham, E. Chain, C. M. Fletcher, A. D. Gardner, N. G. Heatley, M. A. Jennings et H. W. Florey. *The Lancet*, 241, 1941, pp. 177-289; J. R. Challinor, *Nature*, London, 150, 1942, p. 688.

obtenir empiriquement, puis systématiquement des milieux et des souches permettant d'atteindre les taux de pénicilline les plus élevés.

Nous nous sommes efforcés de trouver la signification physiologique de cette substance et nous avons recherché particulièrement les facteurs pouvant en limiter la formation ainsi que les relations existant entre la masse ou l'épaisseur du mycélium, la concentration en éléments nutritifs et la quantité de pénicilline sécrétée.

Nous avons reproduit plusieurs fois nos expériences, mais, étant donné l'instabilité des souches et de la pénicilline elle-même, ainsi que l'imprécision des méthodes de dosage, nous considérons nos conclusions surtout comme des hypothèses permettant de faire progresser notre travail d'analyse.

Nos cultures de *Penicillium notatum* (souche cataloguée NA) ont été effectuées à 25° en surface sur milieu de Czapeck tamponné par $33^g,5$ de phosphate disodique, $16^g,5$ de phosphate monopotassique par litre (pH initial 7,5). Le sucre a été ajouté après stérilisation du milieu : nous mettions en général 4^g de glucose pour 100^{cm^3} de milieu.

Le mycélium peut se développer en présence de grandes quantités de pénicilline; un taux de 10000 Unités Oxford par centimètre cube n'arrête pas le développement du mycélium.

Quant à la production de la pénicilline, nous avons vérifié que 40 à 80 U. O./cm^3 de pénicilline, ajoutés au milieu lors de l'ensemencement, n'empêchent pas une production ultérieure de 20 unités/cm^3 égale à celle du témoin.

Des apports successifs de glucose (4^g pour 100^{cm^3} chaque fois que le sucre est épuisé) augmentent la masse de mycélium et permettent de porter le taux de 20 à 60 U. O./cm^3. Il se produit finalement une acidification jusqu'à pH 3 et la pénicilline disparaît.

Dans une autre série d'expériences nous avons fait varier l'épaisseur du milieu et sa richesse en matières nutritives, la surface libre demeurant égale à 100^{cm^2} (fioles de Fourneau de 1^l).

Expérience 23.

Volume (cm^3).	Lactose utilisé en g pour 100^{cm^3}.	P^{ine} taux mx. U. O./cm^3.	P^{ine} totale max. U. O.	Mycélium sec. (g).	$\frac{\text{P}^{ine}\text{ totale}}{\text{Myc. sec.}}$
25..............	1,0	40	1000	0,4555	2200
25+175 eau......	1	4	800	0,495	1700
200............	5,6	40	8000	2,50	3200

Il résulte de cette expérience qu'une dilution du milieu, à valeur nutritive égale, laisse sensiblement constants le maximum de pénicilline totale et le poids sec final de mycélium, et que, pour ce milieu Czapeck, le taux maximum de pénicilline observé est indépendant de l'épaisseur du mycélium.

Toutefois d'autres expériences nous ont montré que, si l'on augmente encore

l'épaisseur du milieu nutritif, ce taux diminue en même temps qu'il est plus lent à s'établir.

Nous pouvons donc conclure de ces essais pour la souche étudiée :

1° Ce n'est pas une toxicité de la pénicilline à l'égard du mycélium, ou une réaction d'équilibre entre la pénicilline libérée et son précurseur, qui limitent le taux de pénicilline obtenue dans un milieu donné.

2° L'épuisement du milieu en sucre n'est pas condition nécessaire pour la libération de la pénicilline.

3° Avec le milieu utilisé, dilué ou non avec de l'eau, la quantité maximum de pénicilline totale produite est sensiblement proportionnelle à la quantité d'éléments nutritifs sur lesquels pousse le mycélium tant que l'épaisseur du mycélium ne dépasse pas des valeurs trop élevées.

A 15^h55^m l'Académie se forme en Comité secret.

La séance est levée à 16^h30^m.

L. B.

ERRATA.

(Séance du 12 décembre 1945.)

Note de M. *Marc Krasner*, Théorie de la ramification dans les extensions finies des corps valués : compléments et applications :

Page 737, ligne 23,	*au lieu de*	$\mathfrak{v}_{q,\Pi}/\mathfrak{v}_{q+1}$ est dit	*lire*	et, $\mathfrak{v}_{q,\Pi}/\mathfrak{v}_{q+1}$ étant dit
» » 23,		et que		, que
» » 25,		$\mathfrak{v}_{q,\Pi}\cap\mathfrak{v}'_q\mathfrak{v}_{q+1}$		$\mathfrak{v}_{q,\Pi}\cap\mathfrak{v}'_q/\mathfrak{v}_{q+1}$
» » 30,		$\omega(p)p:(p-1)$		$[\omega(p)p:(p-1)]+\omega(\mathfrak{p})$
» » 31,		$\omega(p):(p-1)$		$[\omega(p):(p-1)]+\omega(\mathfrak{p})$

(Séance du 2 janvier 1946.)

Note de M. *Marc Krasner*, Essai d'une théorie des fonctions analytiques dans les corps valués complets : séries de Taylor et de Laurent issues de ces corps :

Page 38, lignes 19, 21, 23,	*au lieu de*	(1)	*lire*	(2)
» ligne 28,		$\nu_{i-1}<\nu<\nu_i$		$\nu_{i-1}>\nu>\nu_i$
» » 34,		φ^*		$\overline{\varphi}^*$
» » 43,		1945		1934-5
39, » 6,		de l'analyse, dans		de l'analyse dans
» » 20,		$\omega\vert\ldots\vert$		$\omega(\ldots)$
» » 24,		de la ν-droite		de la droite
» » 25,		(1)		(2)
» » 26,		$\overline{\nu}'<\nu<\overline{\nu}^*$		$\overline{\nu}^*<\nu<\overline{\nu}'$
» » 32,		$\nu_{i-1}<\nu<\nu_i$		$\nu_{i-1}>\nu>v_i$

(Séance du 14 janvier 1946.)

Note de M. *Marc Krasner*, Essai d'une théorie des fonctions analytiques dans les corps valués complets : fonctions holomorphes et méromorphes :

Page 167, ligne 24,	*au lieu de* $\bar{r} \leqq \lvert z_i(a) - \alpha \rvert < r$,	*lire* $\lvert z_i(a) - \alpha \rvert$ soit dans $[\bar{r}, r)$
» » 28,	$\bar{r}$	$\bar{r}'$
» » 35,	$\mathrm{Log}\,\lvert f(0) + \mathrm{N}(0, r; 0)$	$\mathrm{Log}\,\lvert f(0) \rvert + \mathrm{N}(0, r; 0)$

(Séance du 11 février 1946.)

Note de M. *Jacques Courtois*, Les expanseurs :

Page 377, formule (1), *au lieu de* $(\vec{a}.\vec{a})^{-u}$, *lire* $(\vec{a}.\vec{x})^{-u}$.

Page 378, formule (3), *lire*

$$\Sigma(-1)^{\Sigma_i n_i} \frac{(n_l - 1)!}{(u-1)!\,\Pi_i(n_i!)} \mathrm{A}_{-n_l, n_i} x^{l^{-n_l}} \Pi_i(x^{i^{n_i}}).$$

Page 378, ligne 13 en remontant, *lire* Vis-à-vis des affinités ou changements de coordonnées *réels*, dans les cas simples comme $(\vec{a})^{p/q}$, $\vec{a}$ étant réel, ces déterminations.....